



TRAITEMENT DU SIGNAL

David DELOUCHE
david.delouche@hei.fr

HEI Campus Centre

Un peu de lecture

- F. Auger. Introduction à la théorie du signal et de l'information. Edition Technip, 1999.
- F. Cottet. Traitement des signaux et acquisition de données. Dunod, 1997.
- F. Cottet. Traitement du signal : aide mémoire. Dunod, 2000.
- F. De Coulon. Traité d'électricité (volume 6) : théorie et traitement des signaux. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- H. Dedieu, C. Dehollain, M. Hasler, et J. Neirynck. Traité d'électricité (volume 19) : filtres électriques. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.
- P.-G. Fontolliet. Traité d'électricité (volume 18) : systèmes de télécommunications. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- D. Ghorbanzadeh, P. Mary, N. Point, et D. Vial. Eléments de mathématiques du signal : exercices résolus. Dunod, 2003.
- M. Kunt. Traité d'électricité (volume 20) : traitement numérique des signaux. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.
- H. Reinhard. Eléments de mathématiques du signal (tome 1) : signaux déterministes. Dunod, 1995.
- M. Rivoire et J.-L. Ferrier. Cours d'automatique (tome 1) : signaux et systèmes. Eyrolles, 1995.
- P. Thuillier et J.-C. Belloc. Mathématiques : analyse 3. Masson, 1989.

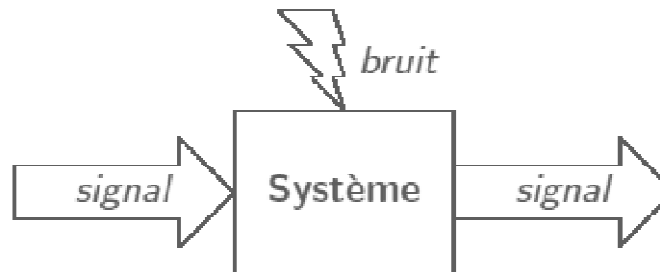
Plan

- Introduction
- Signaux
- Systèmes
- Transformée de Fourier
- Filtrage
- Corrélation
- Modulation
- Les signaux numériques

Introduction

- Définitions

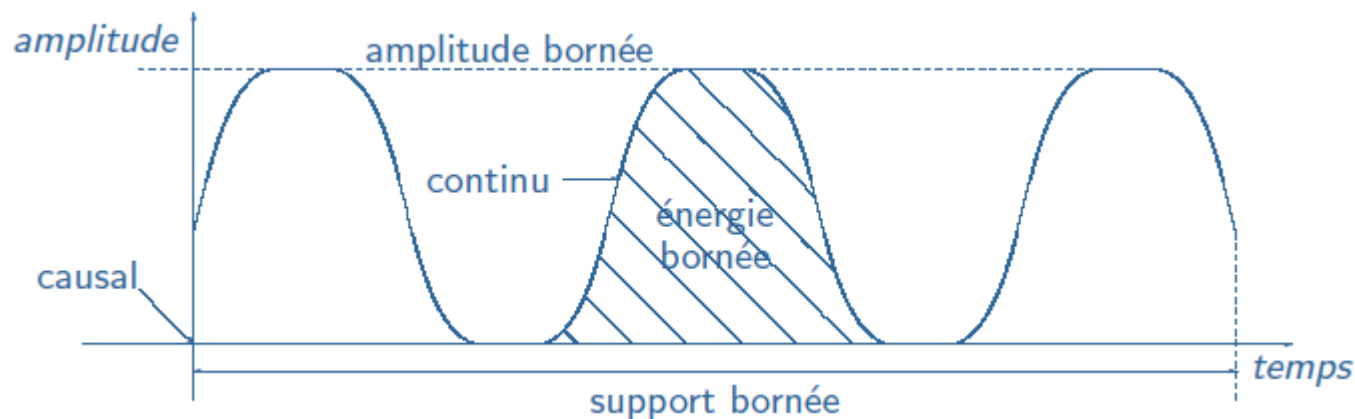
- ✓ Signal : entité (courant électrique, onde acoustique, onde lumineuse, suite de nombres) engendrée par un phénomène physique et véhiculant une information (musique, parole, son, image, température).
- ✓ Système : ensemble isolé de dispositifs établissent un lien de cause à effet entre des signaux d'entrée (excitations : commandes, consignes, perturbations) et des signaux de sortie (réponses ou mesures).
- ✓ Bruit : phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal.



Introduction

- Remarques

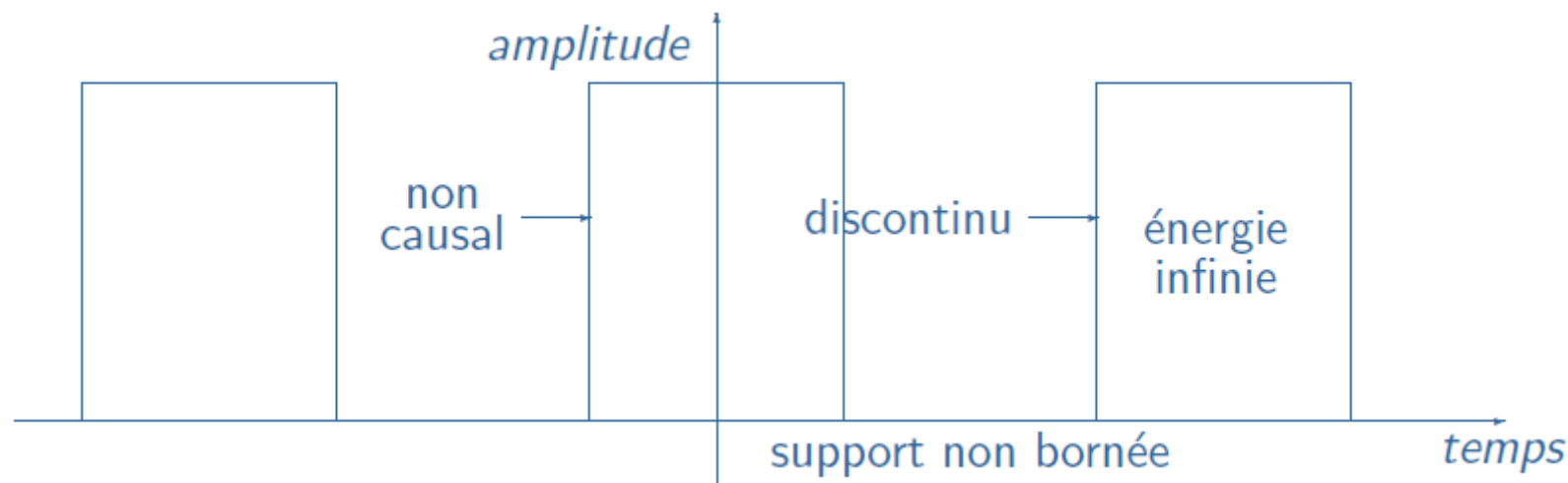
- ✓ Un signal expérimental $s(t)$ est généralement un signal électrique délivré par un capteur ou un appareil de mesure et représente donc une tension ou un courant en fonction du temps. Il peut être de tout autre nature mais doit être physiquement réalisable et répondre à un ensemble de contraintes :
- à énergie bornée,
- à amplitude bornée,
- continu,
- causal, défini sur $\mathbb{R}^+$,
- à support borné (de durée limitée ou finie),
- de spectre à support borné.



Introduction

✓ Sur le plan théorique, un signal est représenté par une fonction ou une distribution réelle ou complexe qui permettent son étude de façon plus aisée. Ainsi les modèles utilisés possèdent des caractéristiques différentes des signaux expérimentaux :

- à énergie théorique infinie,
- à amplitude non bornée,
- possédant des discontinuités,
- définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- à support non borné (observé durant un temps infini),
- à spectre infini.



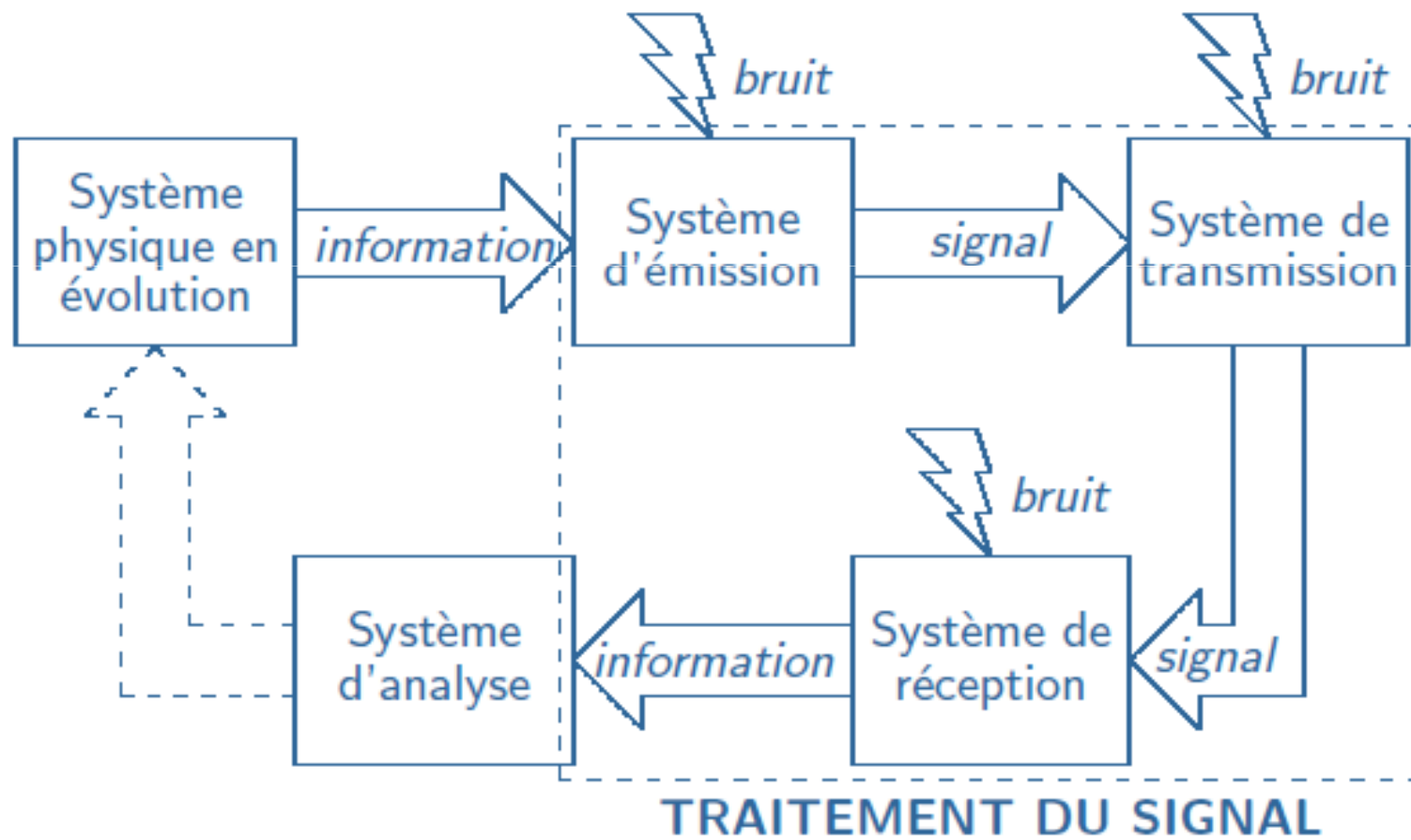
Introduction

Le traitement du signal est la discipline technique basée sur la théorie du signal (description mathématique ou modélisation des signaux) qui a pour objectifs l'élaboration, la transmission et l'interprétation des signaux. Elle utilise les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée et peut se décomposer de la façon suivante :

- système d'émission chargé de créer ou d'élaborer le signal afin d'y incorporer l'information (codage, échantillonnage, modulation),
- système de transmission chargé de transmettre le signal afin de transporter l'information (amplification, lignes électriques, réseaux, antennes),
- système de réception chargé d'interpréter le signal afin d'y extraire l'information (mesure, détection, filtrage, décodage, démodulation, estimation).

Introduction

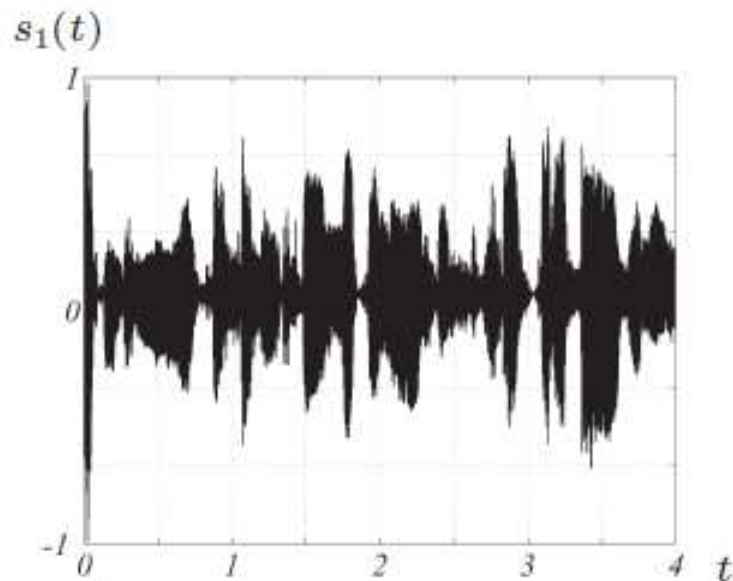
Théorie de la communication : traitement du signal et de l'information



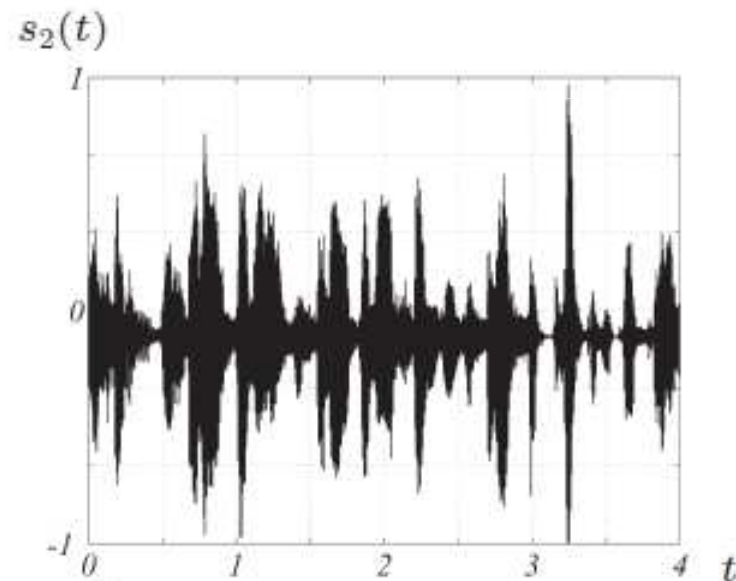
Introduction

Exemple d'application : la transmission des signaux radiophoniques, la radiodiffusion

Soient deux messages diffusés par deux émetteurs radios : les informations sur radio 1 et la météo sur radio 2.



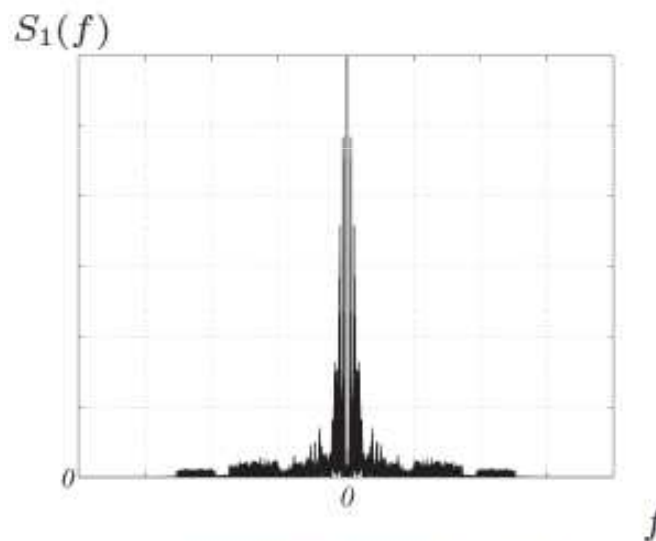
Évolution temporelle du signal $s_1(t)$
correspondant au message : infos



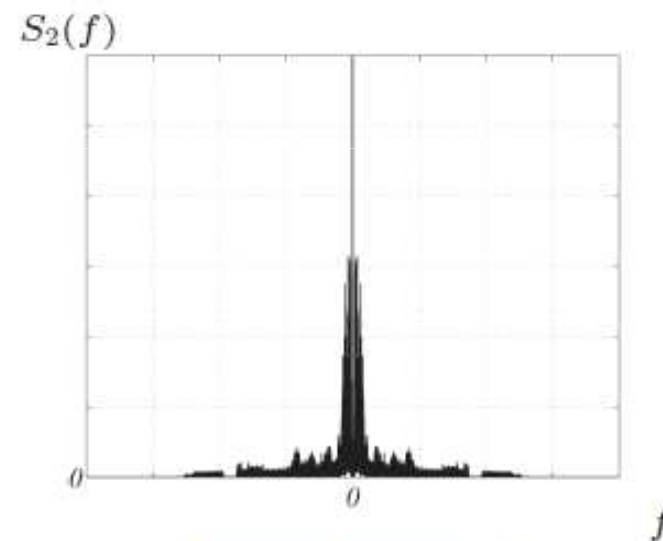
Évolution temporelle du signal $s_2(t)$
correspondant au message : météo

Introduction

- **Problème 1** : le support de transmission, ici l'air et les antennes, n'est pas adapté aux signaux transmis. Les messages transmis peuvent ainsi être atténués ou bruités.



Spectre du signal $s_1(t)$

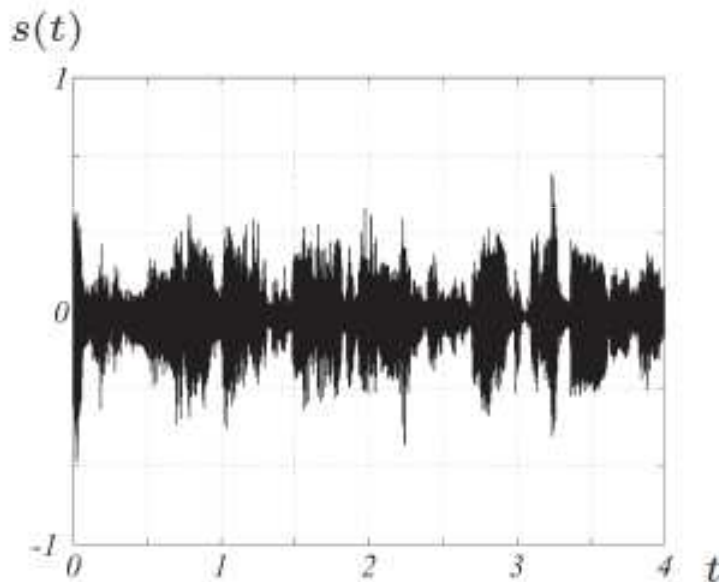


Spectre du signal $s_2(t)$

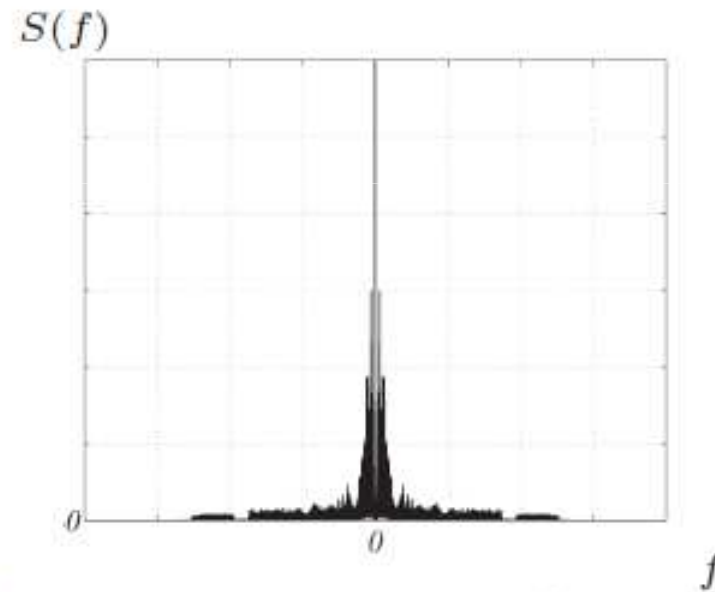
Les signaux de parole sont des signaux basses fréquences (BF) comprises entre 300 Hz et 3,4 kHz. Les spectres des signaux diffusés sur les Grandes Ondes, par exemple, sont volontairement tronqué à 4,5 kHz.

Introduction

- Problème 2 : les signaux transmis occupent le même domaine de fréquence et sont émis en même temps.



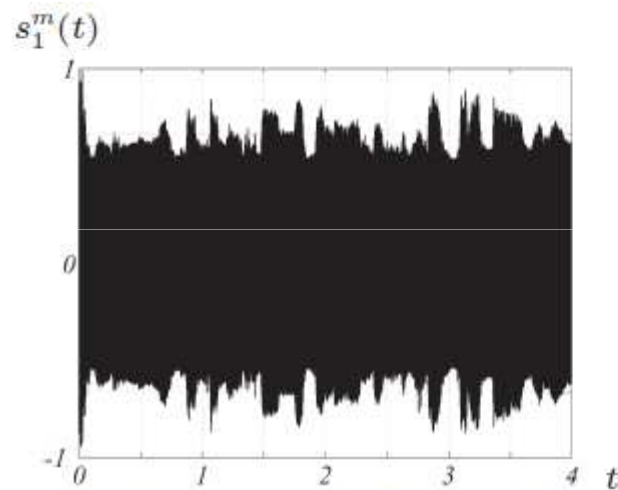
Évolution temporelle du signal $s(t)$ capté par le récepteur : message



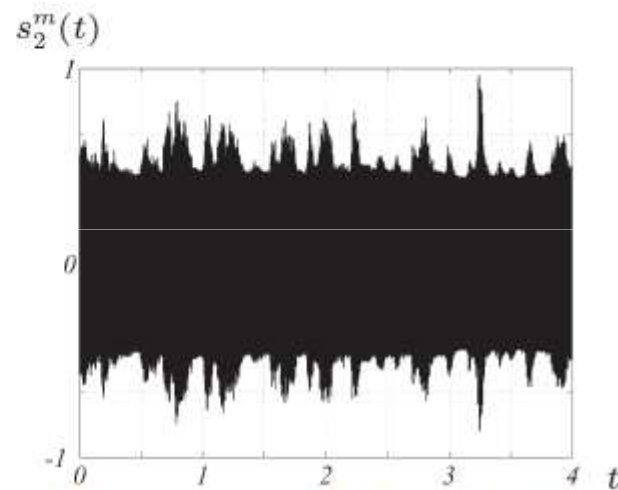
Spectre du signal $s(t)$

Introduction

- Solution : chaque signal est modulé avec un signal de fréquence différente et élevée avant d'être émis.



Évolution temporelle du signal $s_1^m(t)$
correspondant au message : infos modulé



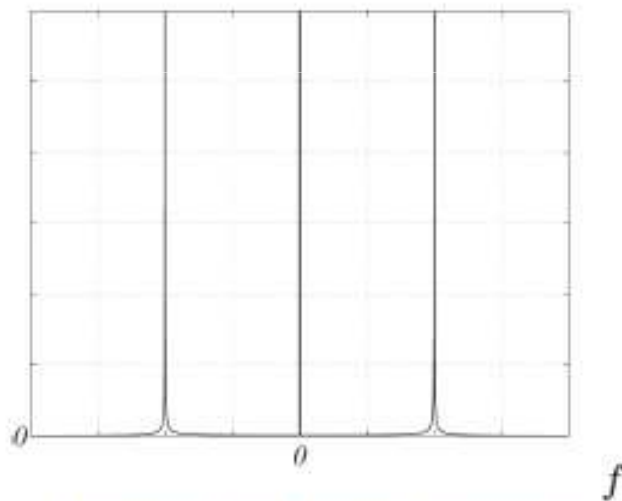
Évolution temporelle du signal $s_2^m(t)$
correspondant au message : météo modulé

- Les signaux utilisés pour réaliser la modulation sont généralement des sinusoïdes d'équation $\cos(2f_p t + \varphi)$, avec f_p une haute fréquence. Sur les Grandes Ondes, par exemple, cette fréquence est située entre 150 kHz et 450 kHz.

Introduction

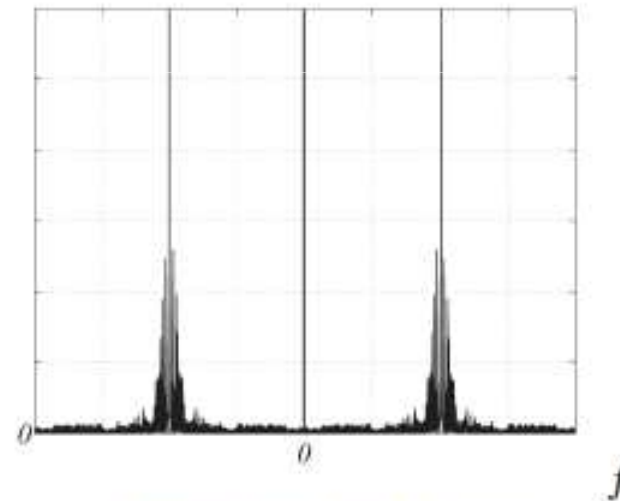
Le spectre du signal modulé se trouve décalé en fréquence et centré sur la fréquence du signal sinusoïdal utilisé pour la modulation.

$$S_2^m(f)$$



Spectre d'un signal sinusoïdal

$$S_1^m(f)$$

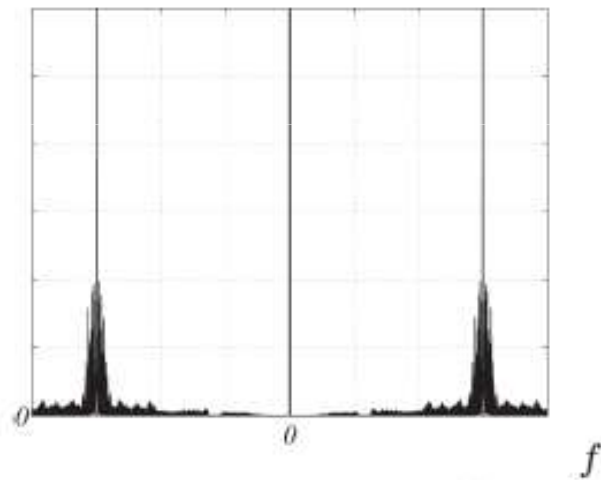


Spectre du signal $s_1^m(t)$

Introduction

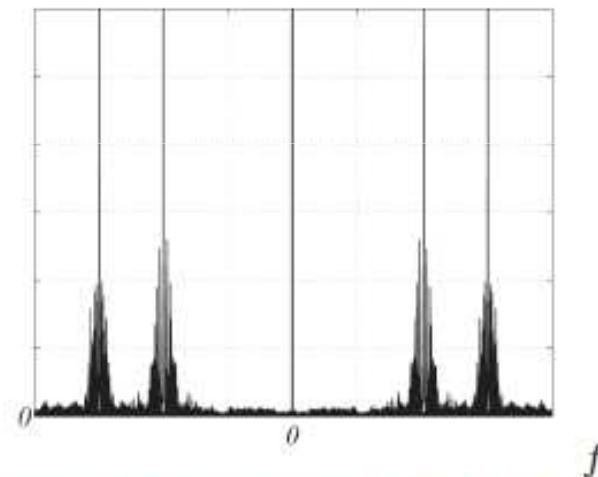
Les spectres des signaux ainsi modulés sont alors correctement séparés sur l'axe des fréquences.

$$S_2^m(f)$$



Spectre du signal $s_2^m(t)$

$$S_1^m(f), S_2^m(f)$$



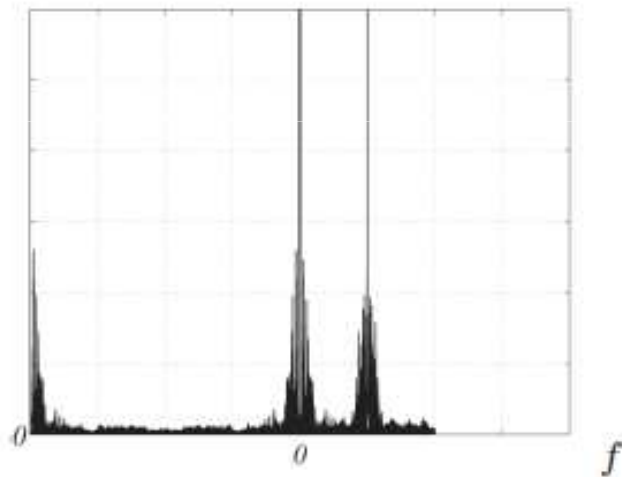
Spectres des signaux $s_1^m(t)$ et $s_2^m(t)$
additionnés

Si les signaux ont un spectre tronqué à 4,5 kHz, ils occupent un domaine spectrale de 9 kHz.

Introduction

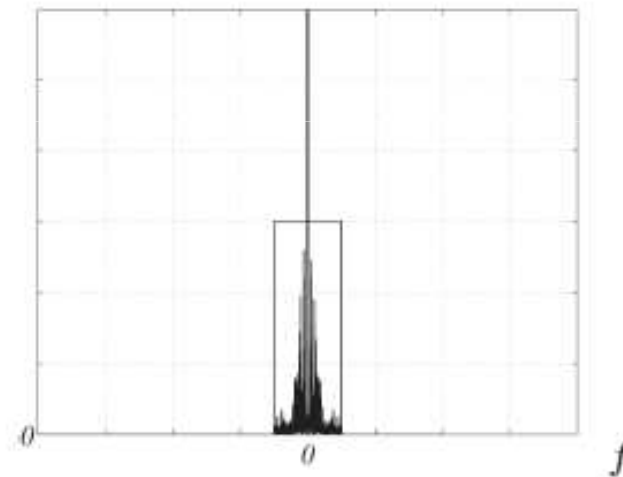
Le signal $s^r(t)$ reçu sur l'antenne du récepteur est enfin démodulé : il subit un changement de fréquence et un filtrage.

$S^r(f)$



Changement du fréquence du signal reçu

$S^r(f)$



filtrage du signal

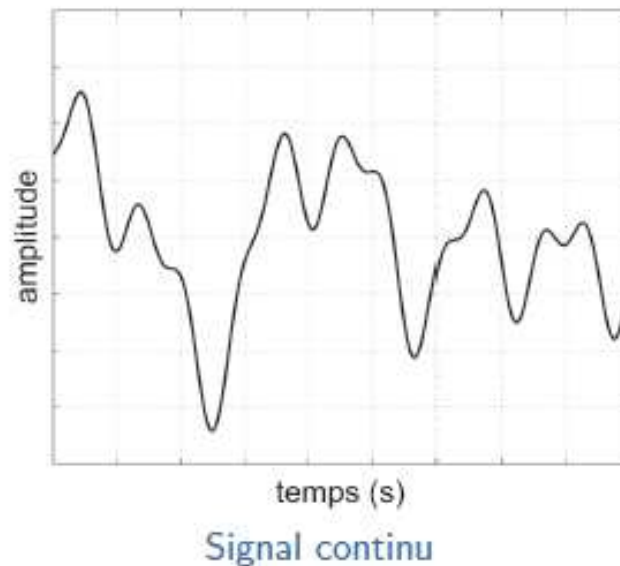
La fréquence utilisée pour le changement de fréquence (démodulation) est celle fixée par l'auditeur sur son poste de radio.

Introduction

Classification des signaux

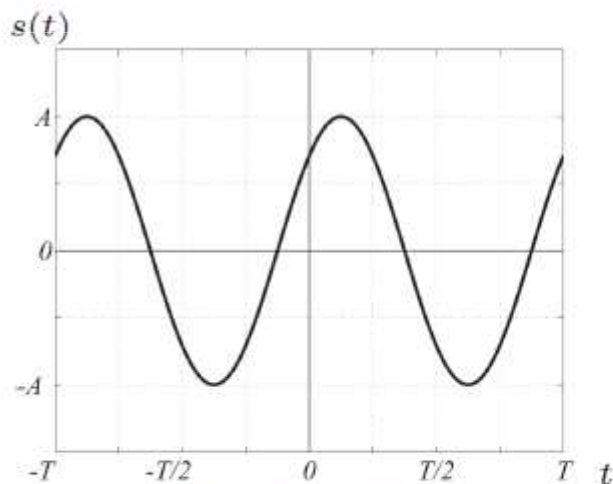
Classification temporelle ou phénoménologique :

Signal certain ou déterministe : son évolution temporelle peut être parfaitement décrite par un modèle mathématique.



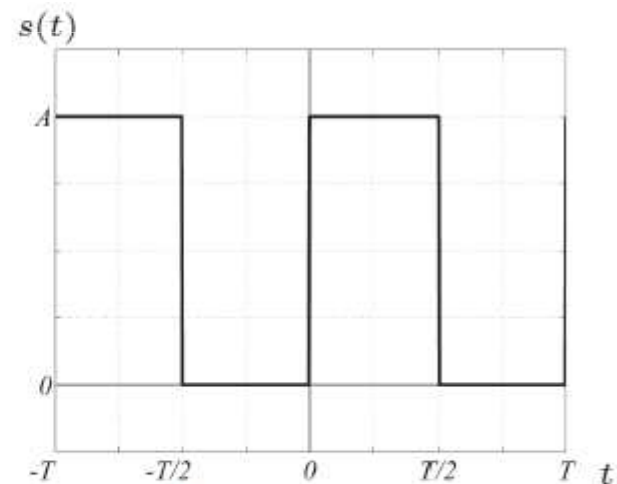
Introduction

- **Signal périodique** : un signal $s(t)$ est périodique de période T si il satisfait à la relation : $s(t) = s(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On distingue les signaux sinusoïdaux, les signaux pseudo-aléatoires (signal aléatoire qui se répète) et les signaux périodiques composites qui sont la répétition à l'infini d'un motif.



Signal sinusoïdale

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$



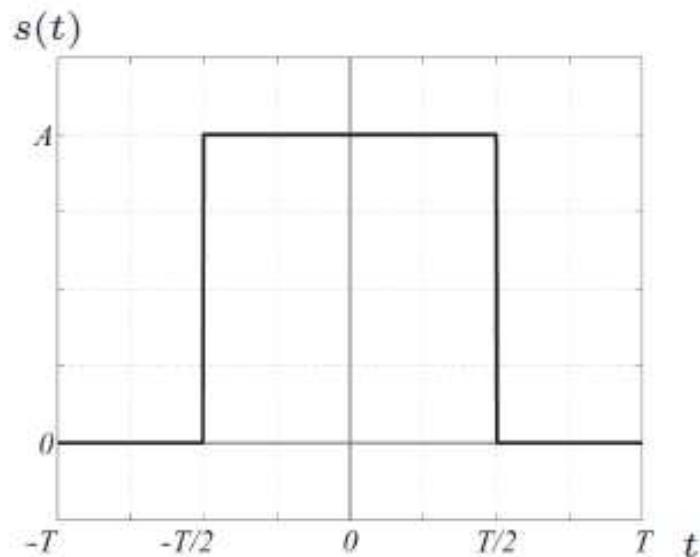
Signal rectangulaire

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{\Pi}(t - kT) \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et}$$

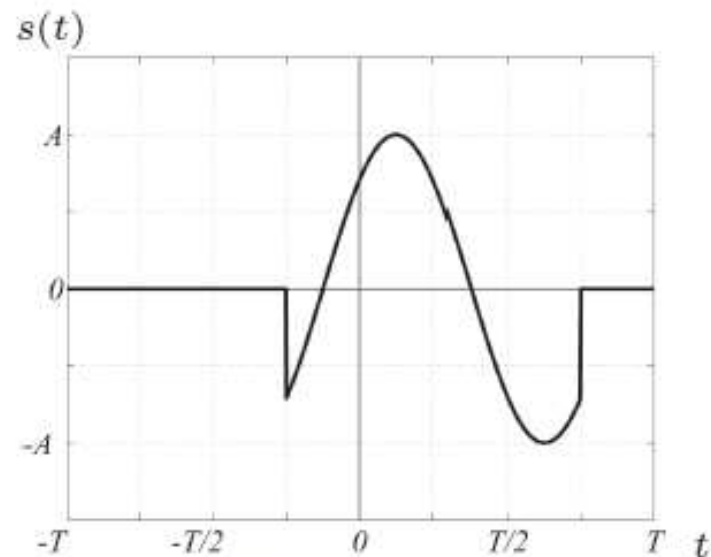
$s_{\Pi}(t)$, un signal porte ou impulsion rectangulaire.

Introduction

Signal non périodique : il ne satisfait pas à la relation précédente. On sépare les signaux quasi-périodiques qui résultent de la somme de signaux sinusoïdaux et les signaux transitoires qui ont une existence éphémère ou qui sont observés sur une durée finie (signaux de durée limitée ou à support borné).



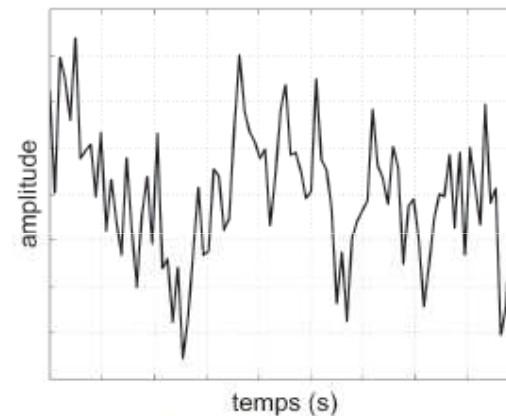
Impulsion rectangulaire



Signal transitoire

Introduction

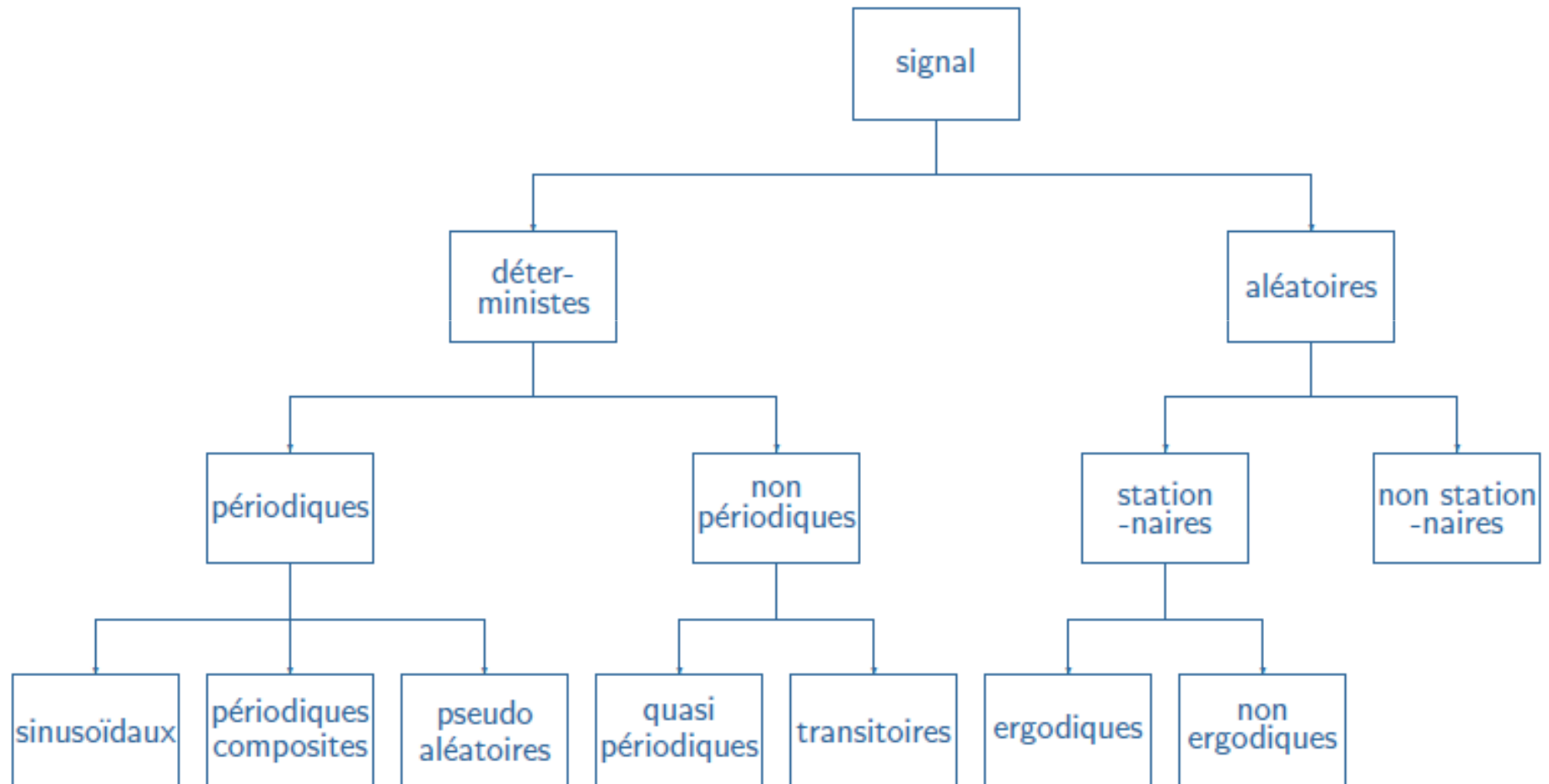
Signal aléatoire, probabiliste ou stochastique : son évolution temporel est imprévisible. Il est caractérisé par des observations statistiques en utilisant des outils probabilistes.



Signal aléatoire

La plupart des signaux sont aléatoires car ils sont souvent bruités ou leur position sur l'axe des temps est inconnue. Il existe deux types de signaux aléatoires : les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps et les signaux non stationnaires. En pratique, on peut considérer qu'un signal est stationnaire pendant une durée d'observation finie.

Introduction

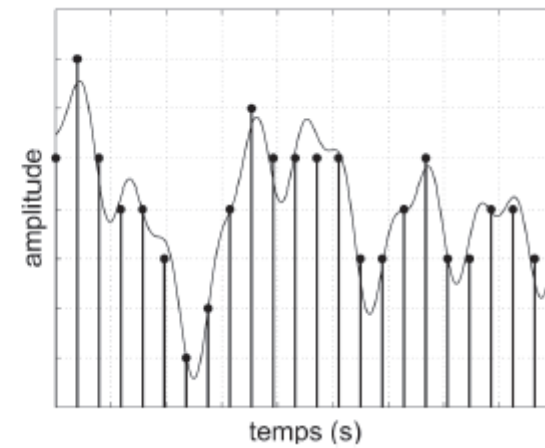
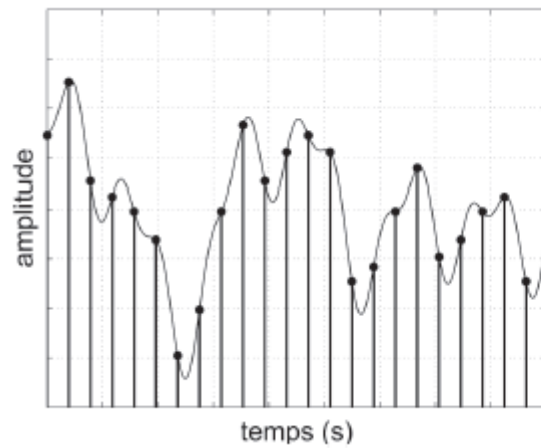
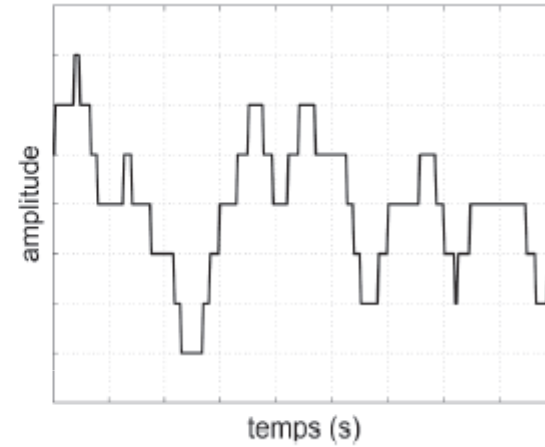
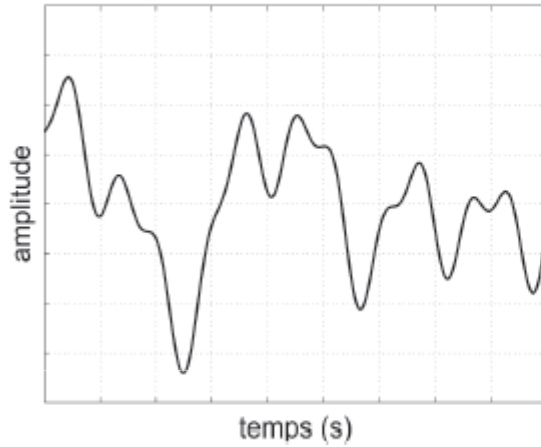


Introduction

Classification morphologique

- Signal à amplitude et temps continus (signal analogique).
- Signal à amplitude discrète et temps continu (signal quantifié) : le signal subit un codage numérique afin d'être traité par un système logique.
- Signal à amplitude continue et temps discret (signal discret) : les valeurs du signal sont disponibles uniquement à certains instants. Lorsque ces instants apparaissent à intervalles réguliers, le signal est échantillonné.
- Signal à amplitude et temps discrets (signal numérique ou digital) : c'est un signal échantillonné dont les valeurs sont codées.

Introduction



Introduction

Classification énergétique :

- $p(t)$, la puissance instantanée d'un signal $s(t)$:

$$p(t) = s(t) \cdot \bar{s}(t) = |s(t)|^2,$$

où $\bar{s}(t)$ est le complexe conjugué de $s(t)$. Si la fonction $s(t)$ est une fonction réelle alors $|s(t)|^2 = s^2(t)$.

- $E(t_1, t_2)$, l'énergie dissipée par un signal $s(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ ($t_1 < t_2$) mesurée en joules (J) :

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt,$$

Introduction

- $P(t_1, t_2)$, la puissance moyenne fournie par un signal $s(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$, mesurée en watts (W) :

$$P(t_1, t_2) = \frac{E(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}.$$

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt.$$

- V , la valeur efficace d'un signal $s(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$ ($t_1 < t_2$) :

$$V = \sqrt{P(t_1, t_2)}.$$

- $\bar{s}(t_1, t_2)$, la moyenne du signal $s(t)$ sur un intervalle $[t_1, t_2]$:

$$\bar{s}(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt.$$

Nota : pour calculer la moyenne glissante (ou courante) sur un intervalle de durée T et exprimant une opération de lissage (moyennage) :

$$\bar{s}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t s(\tau) d\tau$$

Introduction

- E, l'énergie totale dissipée par un signal $s(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt,$$

- P, la puissance moyenne totale fournie par un signal $s(t)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \right\}.$$

Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance moyenne totale est calculée sur une période :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |s(t)|^2 dt$$

Introduction

- $\bar{s}$, la valeur moyenne totale du signal $s(t)$ sur tout l'axe réel :

$$\bar{s} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \right\}.$$

Pour un signal périodique de période T_0 , la valeur moyenne totale est calculée sur une période :

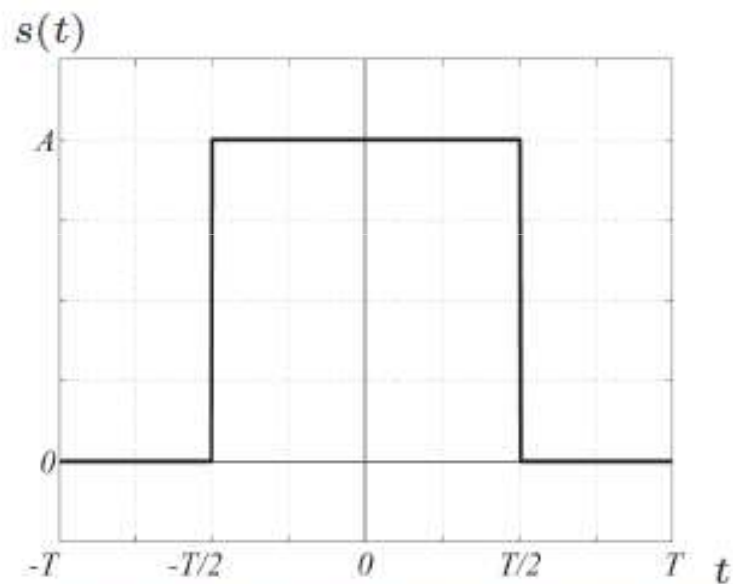
$$\bar{s} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) dt$$

- signal à énergie totale finie (ou convergente) :

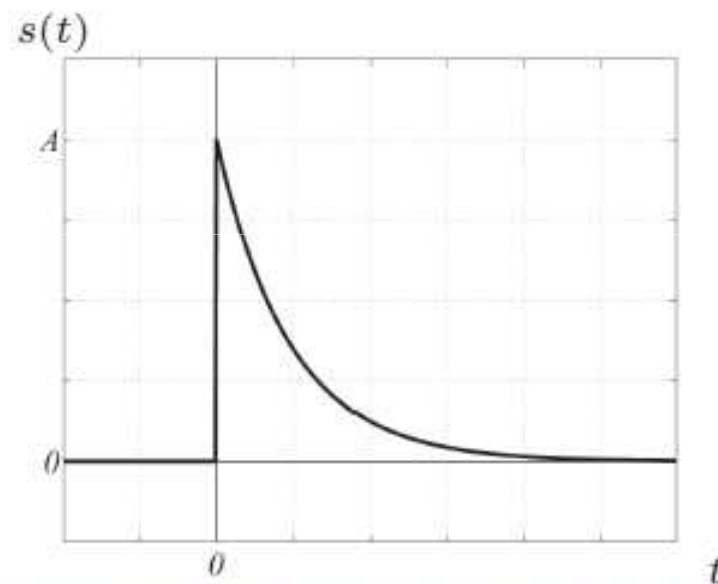
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Sa puissance moyenne totale est nulle (cas des signaux transitoires, des signaux physiques ou physiquement réalisables). Ce sont des signaux de carré sommable (ou intégrable).

Introduction



Impulsion rectangulaire centrée en zéro
d'amplitude A et de durée T , $A \text{ rect}(\frac{t}{T})$



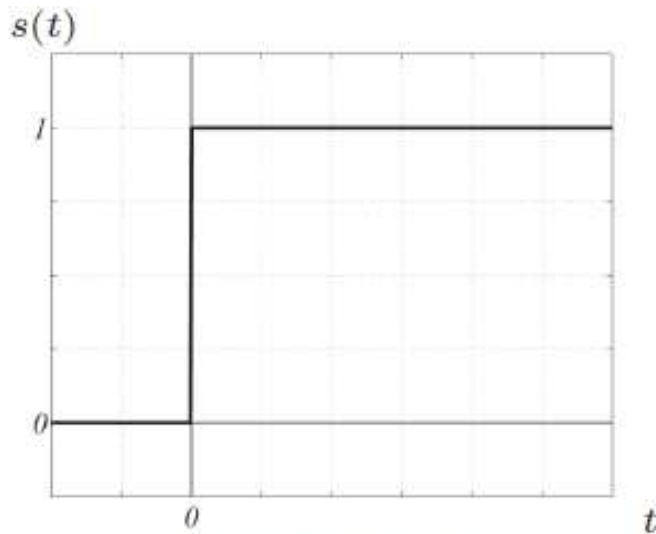
Impulsion exponentielle simple d'amplitude A ,
 $A \exp(-at) \cdot \Gamma(t)$

Introduction

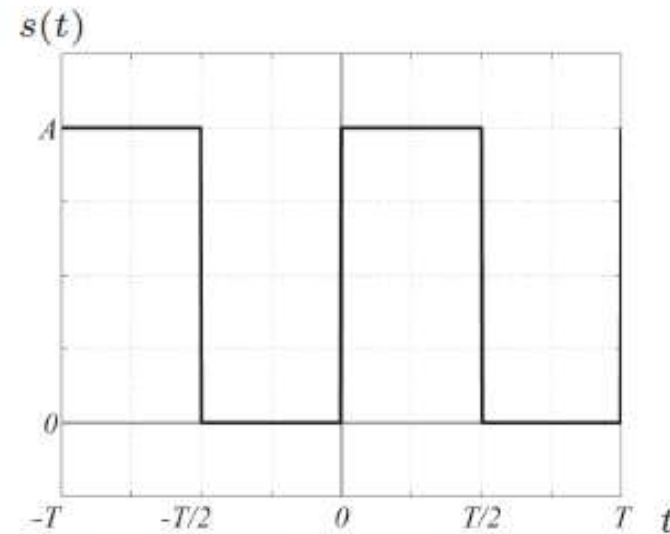
- Signal à puissance moyenne totale finie (ou bornée) :

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \right\} < \infty.$$

Son énergie totale est infinie (cas des signaux périodiques, des signaux physiquement irréalisables comme les modèles mathématiques).



Échelon unitaire, $\Gamma(t)$



Signal rectangulaire périodique d'amplitude A
et de période T

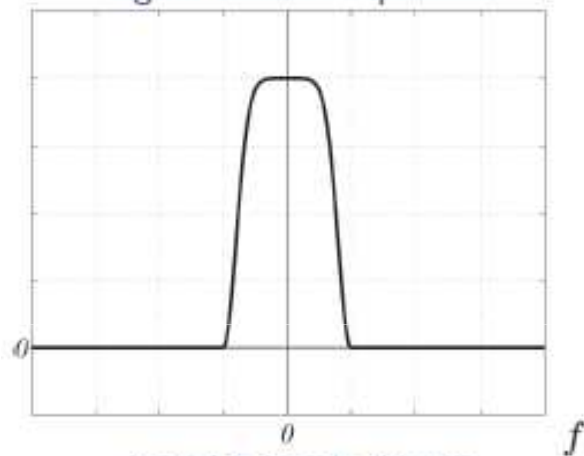
Introduction

Classification fréquentielle ou spectrale

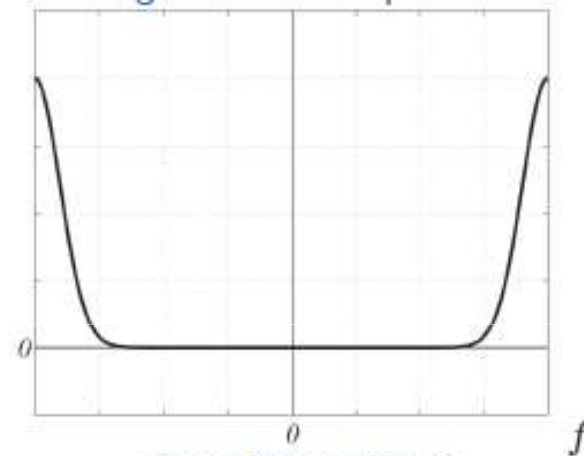
- spectre d'un signal : le spectre d'un signal est la représentation de son amplitude, de sa phase, de son énergie ou de sa puissance en fonction de sa fréquence f ou de sa longueur d'onde λ ($\lambda = c/f$, avec $c = 300\,000$ km/s).
- largeur de bande (ou largeur spectrale) : c'est le domaine des fréquences occupé par le spectre d'un signal. Elle est définie comme la différence entre les fréquences maximum et minimum de ce spectre. En fonction de la largeur de bande et en fonction du domaine de fréquences dans lequel se situe le signal, différents types de signaux se distinguent :
 - ✓ les signaux à bande étroite dont la largeur de bande est relativement petite,
 - ✓ les signaux à bande large dont la largeur de bande est relativement grande voire infinie,
 - ✓ les signaux de basses fréquences (BF) dont la largeur de bande est centrée sur des fréquences relativement faibles,
 - ✓ les signaux de hautes fréquences (HF) dont la largeur de bande est centrée sur des fréquences relativement importantes.

Introduction

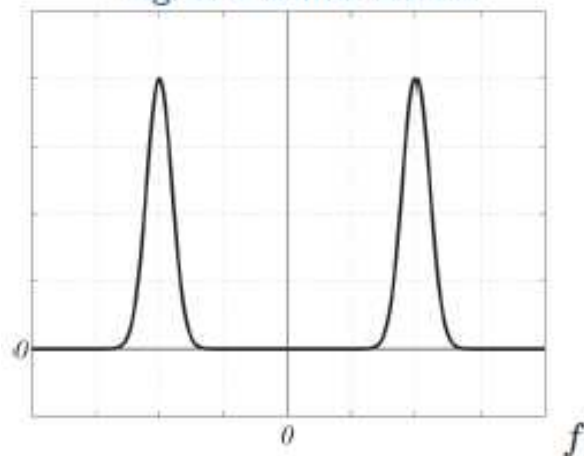
signal basses fréquences



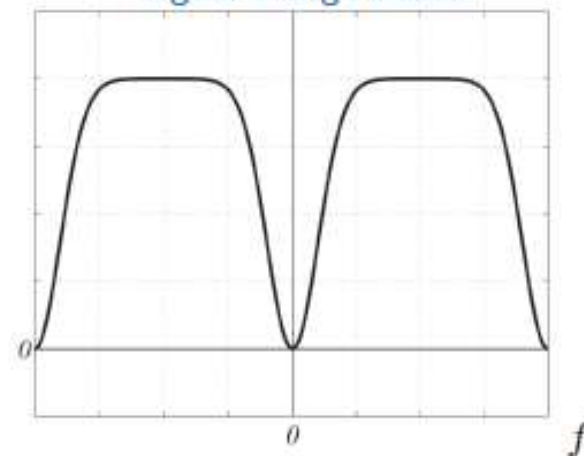
signal hautes fréquences



signal à bande étroite

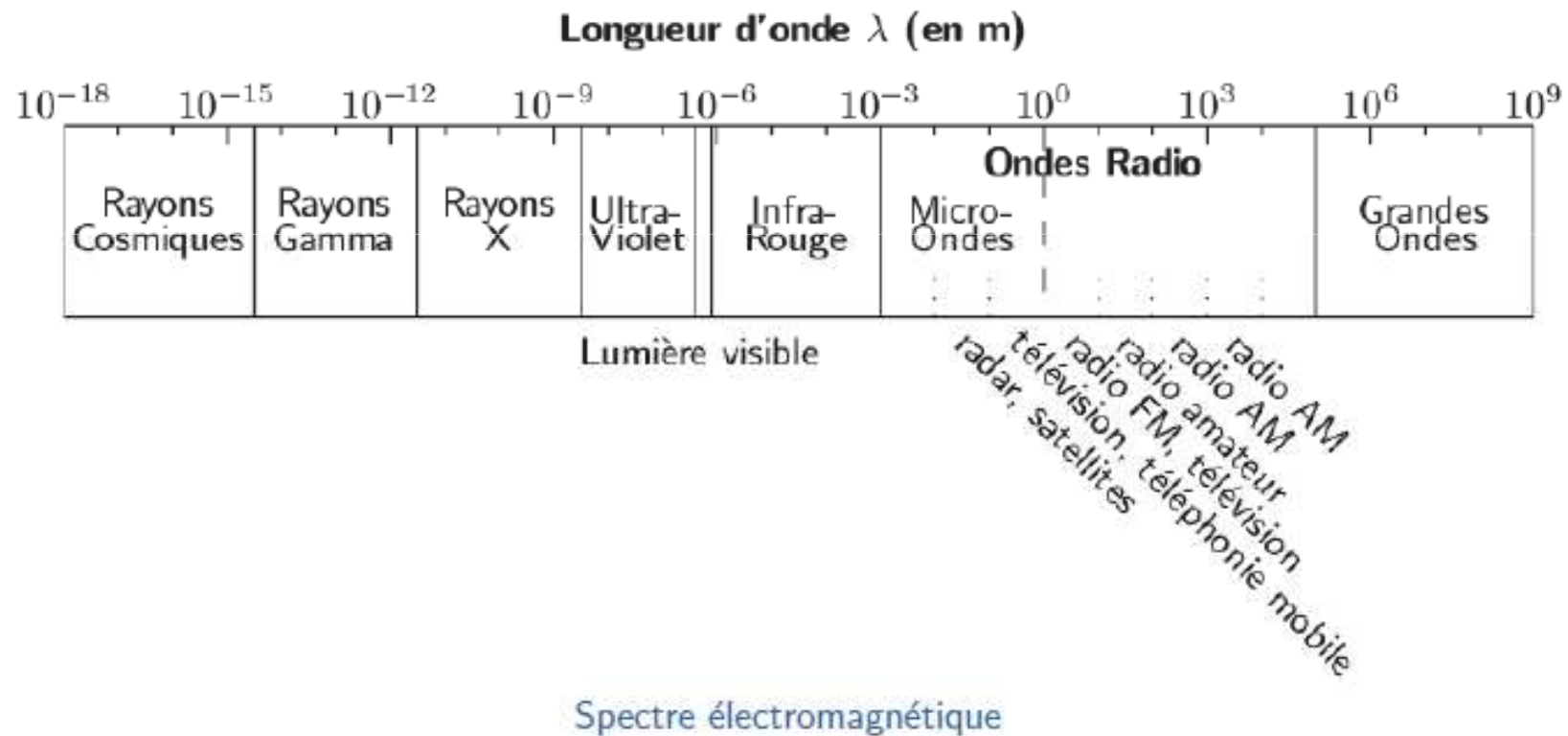


signal à large bande



Introduction

Domaines de fréquences du spectre électromagnétique



Introduction

- Très basses fréquences (TBF ou VLF) : entre 3 KHz et 30 KHz, elles font partie de la famille des grandes ondes qui permettent le transport des sons audibles.
- Basses fréquences (BF ou LF) : entre 30 KHz et 300 KHz, elles font partie de la famille des ondes radio.
- Moyennes fréquences (MF) : entre 300 KHz et 3 MHz, elles sont utilisées pour la radio AM (famille des ondes radio).
- Hautes fréquences (HF) : entre 3 MHz et 30 MHz, elles sont surtout utilisées pour la radio amateur (famille des ondes radio).
- Très hautes fréquences (VHF) : entre 30 MHz et 300 MHz, elles sont utilisées pour la télévision et la radio FM (famille des ondes radio).
- Ultra hautes fréquences (UHF) : entre 300 MHz et 3 GHz, elles sont utilisées pour la télévision, la radio mobile, les téléphones cellulaires ainsi que les satellites. elles font partie à la fois de la famille des ondes radio et de celle des micro-ondes.

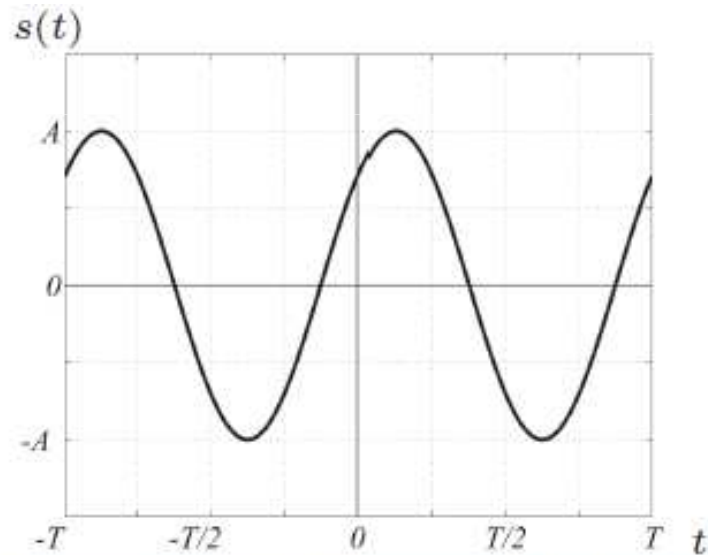
Introduction

- Super hautes fréquences (SHF) : entre 3 GHz et 30 GHz, elles sont utilisées surtout pour les satellites et les radars (famille des ondes radio et des microondes).
- Extra hautes fréquences (EHF) : entre 30 GHz et 300 GHz, elles font partie de la famille des micro-ondes.
- Infra-rouge (IR) : entre 300 GHz et 800 nm, elles sont utilisées pour les lasers, la photographie et la détection.
- Lumière visible : entre 800 nm et 400 nm, c'est la partie du rayonnement électromagnétique à laquelle nos yeux sont sensibles.
- Ultra-violet (UV) : les UVA (entre 400 nm et 320 nm) sont les ondes qui provoquent le bronzage, les UVB (entre 320 nm et 290 nm) sont la cause des coups de soleil et les UVC (entre 290 nm et 1 nm) ne parviennent pas à la surface de la terre.
- Rayons X : entre 0,003 nm et 3 nm, ils sont utilisés pour la radiographie, la photographie, la tomographie et les lasers à rayons X.
- Rayons Gamma : les rayons gamma sont des ondes électromagnétiques émises par des noyaux radioactifs et durant certaines réactions nucléaires.
- Rayon cosmiques.

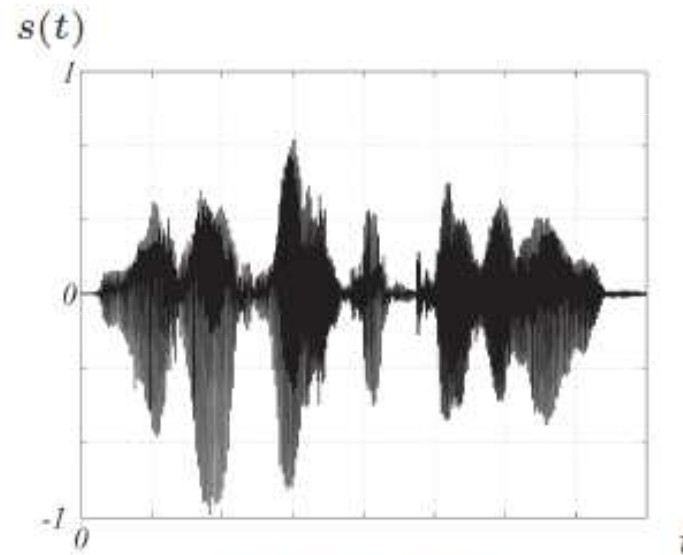
Introduction

Classification dimensionnelle

- 1 dimension : tension électrique V en fonction du temps t ,



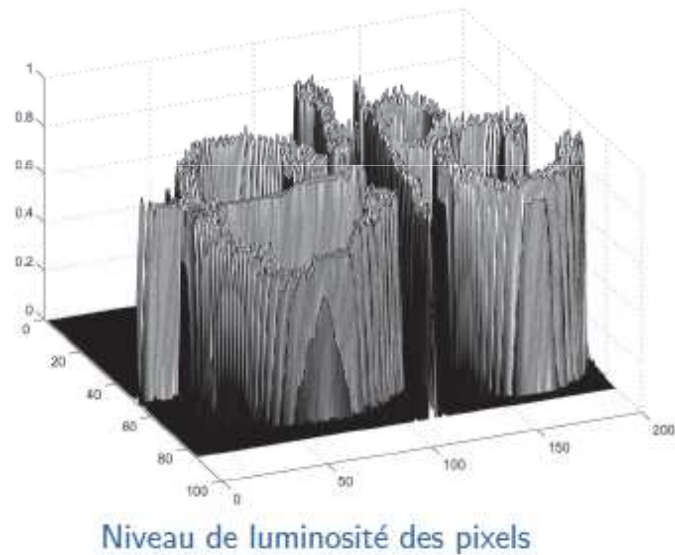
Signal sinusoïdal d'un générateur de fonctions



Signal de parole

Introduction

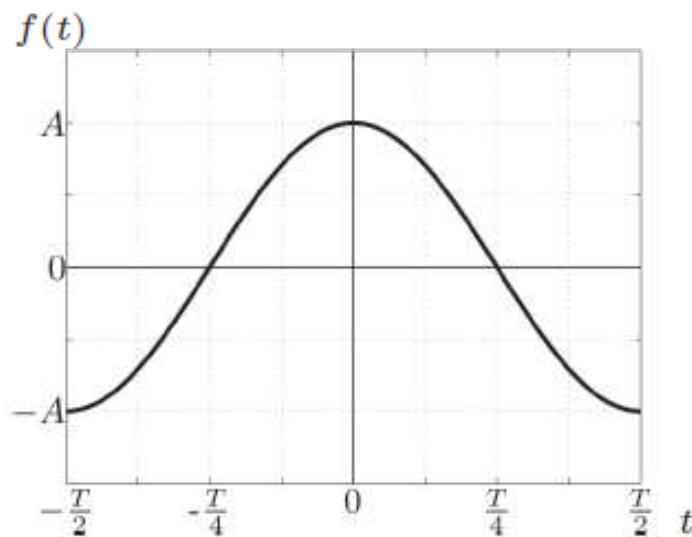
- 2 dimensions : niveau de luminosité L des pixels d'une image statique noir et blanc en fonction de leurs coordonnées en abscisses x et en ordonnées y , $L(x, y)$,



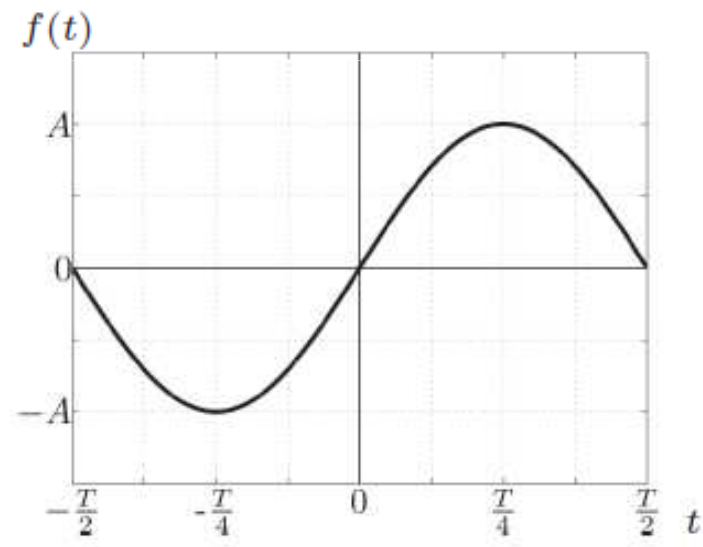
- 3 dimensions : niveau de luminosité L des pixels des images d'un film noir et blanc en fonction de leurs coordonnées en abscisses x et en ordonnées y et en fonction du temps t , $L(x, y, t)$.

Signaux

- Fonction paire : une fonction réelle est paire si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(-t) = f(t)$.
- Fonction impaire : une fonction réelle est impaire si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(-t) = -f(t)$ (ou $f(t) = -f(-t)$).



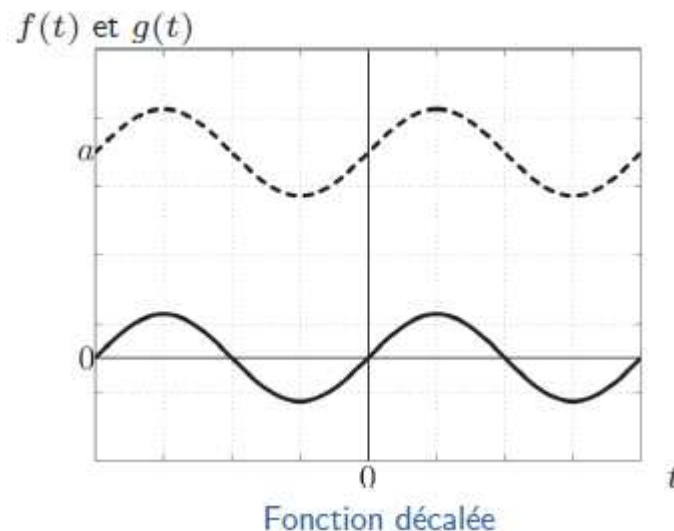
Fonction paire



Fonction impaire

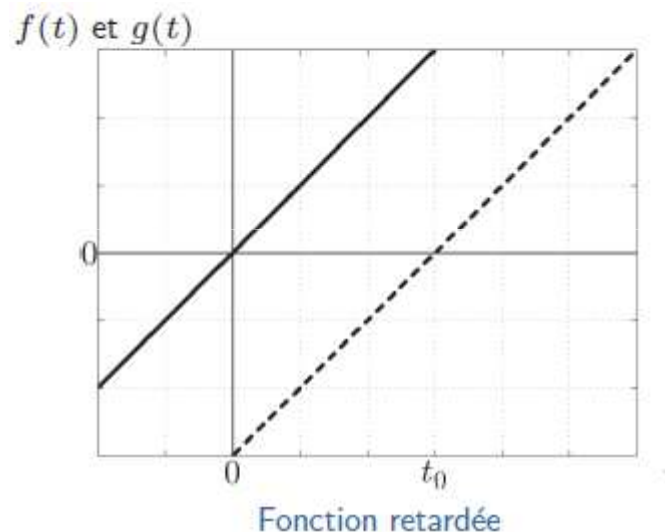
Signaux

- Symétrie hermitienne : une fonction $f(t)$ complexe présente une symétrie hermitienne si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $f(t) = \bar{f}(-t)$ où $\bar{f}(t)$ est le complexe conjuguée de $f(t)$. Sa partie réelle est paire et sa partie imaginaire est impaire.
- Décalage (translation verticale) : un décalage est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$, la fonction $g(t)$ telle que $g(t) = f(t) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.



Signaux

- Fonction retardée (translation horizontale) : la fonction $g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée de t_0 ($t_0 > 0$) si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $g(t) = f(t - t_0)$.

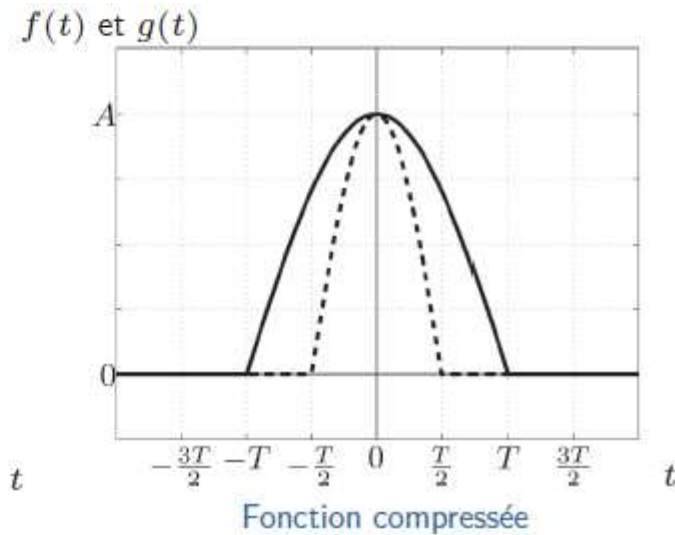
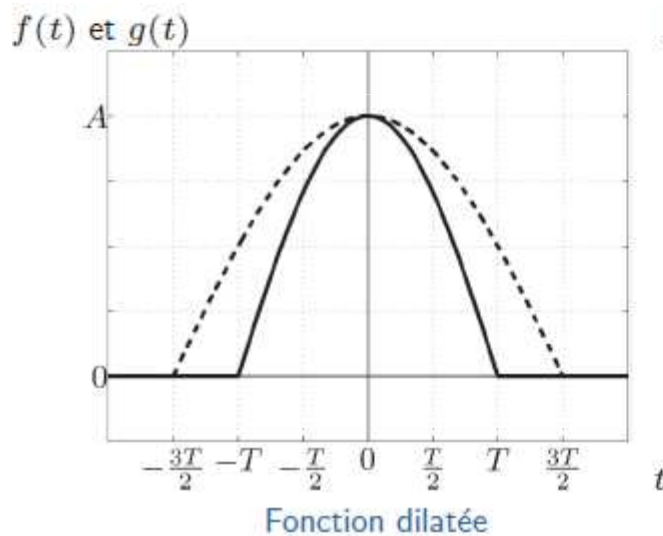


Si $t_0 > 0$, $g(t)$ est en retard sur $f(t)$.

Si $t_0 < 0$ (ou si $g(t) = f(t + t_0)$ et $t_0 > 0$), $g(t)$ est en avance sur $f(t)$.

Signaux

- Changement d'échelle (dilatation ou compression) : un changement d'échelle est la transformation qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$, la fonction $g(t)$ telle que $g(t) = f(at)$ (ou $g(t) = f(t/a)$) avec a , un réel strictement positif ($a \in \mathbb{R}^{+*}$).



Si $g(t) = f(at)$ et $a < 1$ ou si $g(t) = f(t/a)$ et $a > 1$, c'est une dilatation.

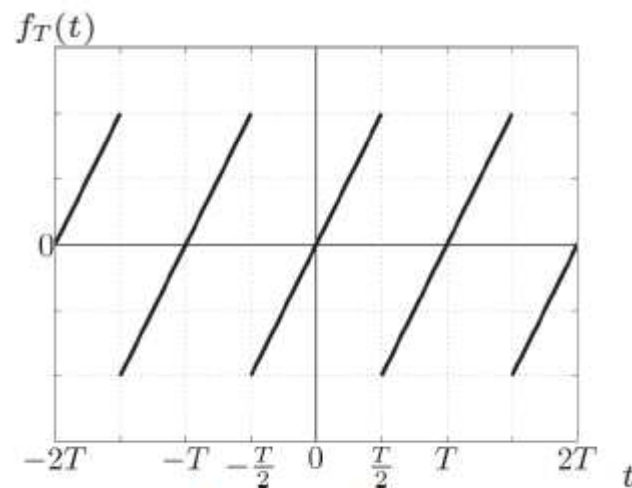
Si $g(t) = f(at)$ et $a > 1$ ou si $g(t) = f(t/a)$ et $a < 1$, c'est une compression.

Signaux

- Fonction périodique : une fonction périodique $f_T(t)$ de période T est la répétition à l'infini avec une période T d'une fonction $f(t)$ définie sur l'intervalle T et appelée motif. Les signaux périodiques sont ainsi définis par la relation :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_T(t) = f_T(t + T)$,

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT), k \in \mathbb{N}.$$



Fonction périodique

Signaux

Impulsion (ou distribution ou pic) de Dirac :

- Définition : l'impulsion de Dirac, notée $\delta(t)$ se définit comme la distribution qui fait correspondre à toute fonction $f(t)$ continue à l'origine sa valeur à l'origine :

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt.$$

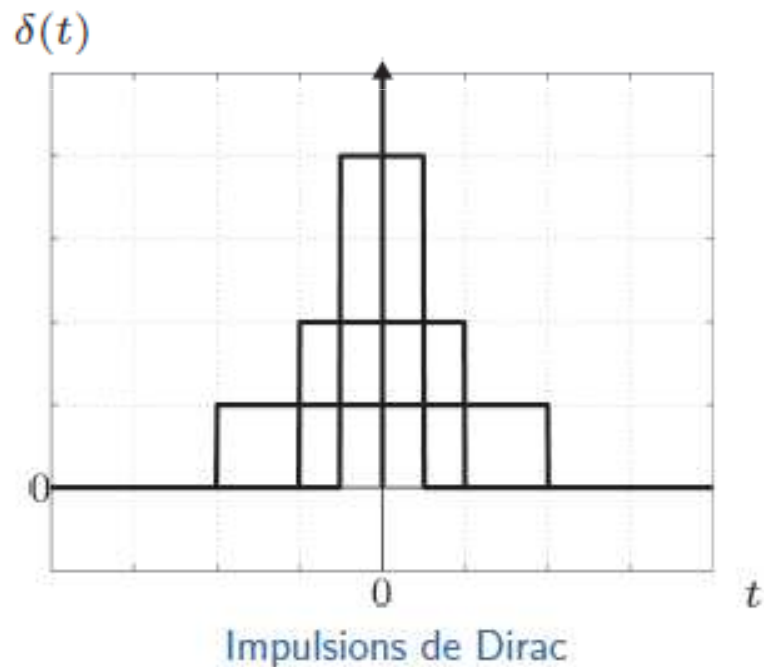
L'aire de $\delta(t)$ est toujours égale à l'unité.

D'une manière plus générale, pour toute fonction $f(t)$ continue en $t = t_0$:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t + t_0) dt.$$

Signaux

- Représentation physique : la distribution de Dirac sert à représenter une action s'exerçant durant un temps très court. C'est donc la limite d'une impulsion rectangulaire de durée T et d'amplitude I/T lorsque $T \rightarrow 0$, l'aire de cette impulsion étant bien égale à $T \times I/T = I$.



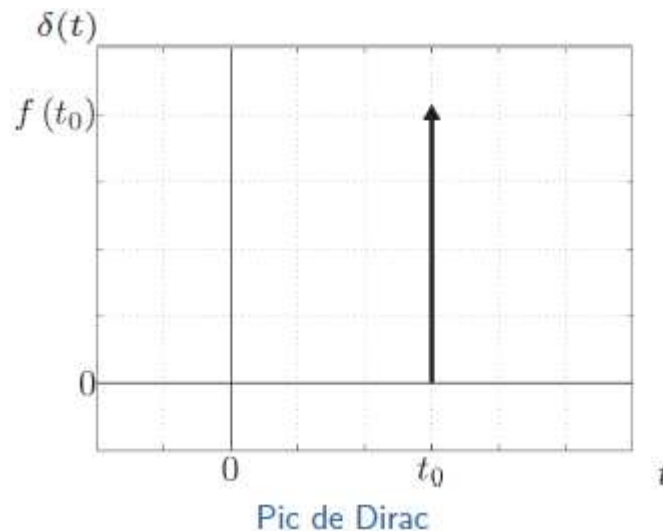
Signaux

- Propriété de localisation :

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t),$$

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0),$$

- Représentation graphique : la représentation graphique conventionnelle d'une impulsion de Dirac de poids $f(t_0)$ en t_0 est une flèche verticale placée en $t = t_0$ de longueur proportionnelle au poids $f(t_0)$.

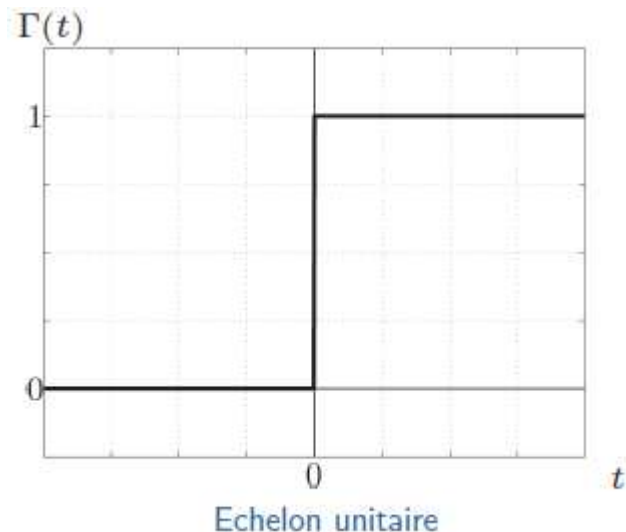


Signaux

- Echelon de Heaviside (ou échelon unitaire) : l'échelon de Heaviside, notée $\Gamma(t)$ se définit comme la primitive de l'impulsion de Dirac :

$$\Gamma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u) du = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Par convention, la valeur à l'origine est fixée à 1/2 mais pour la plupart des applications, il est préférable de lui assigner la valeur 1.



La dérivée de $\Gamma(t)$ est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et est égale au pic de Dirac de poids 1 en $t = 0$:

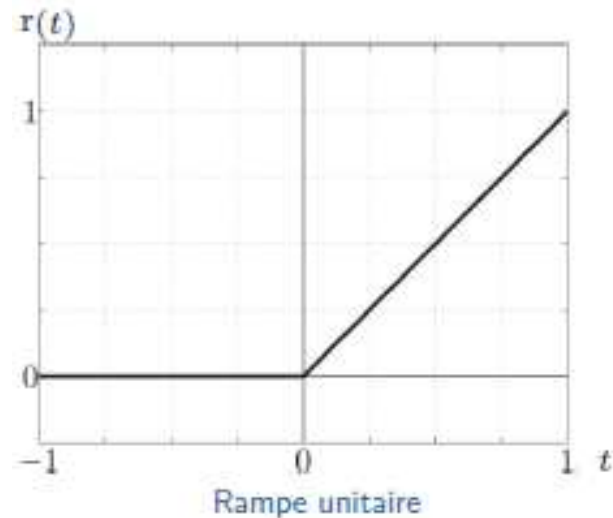
$$\delta(t) = \frac{d\Gamma(t)}{dt}.$$

$\Gamma(t)$ permet de rendre causal n'importe quel signal.

Signaux

- Rampe unitaire : la rampe unitaire, notée $r(t)$ se définit comme la primitive de l'échelon unitaire :

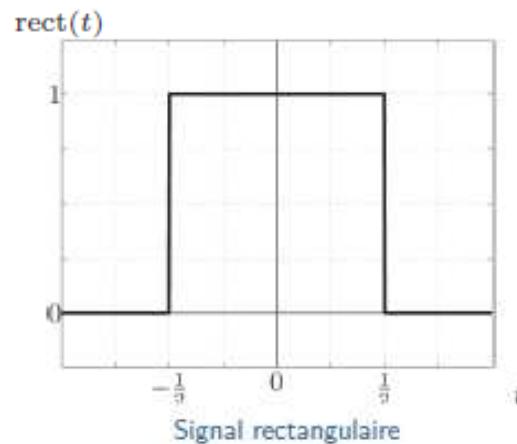
$$r(t) = \int_{-\infty}^t \Gamma(u) du = t \cdot \Gamma(t).$$



Signaux

- Impulsion ou signal rectangulaire (ou signal porte) : le signal rectangulaire, noté $\text{rect}(t)$ ou $\Pi(t)$, est défini par :

$$\text{rect}(t) = \Gamma\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(t - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



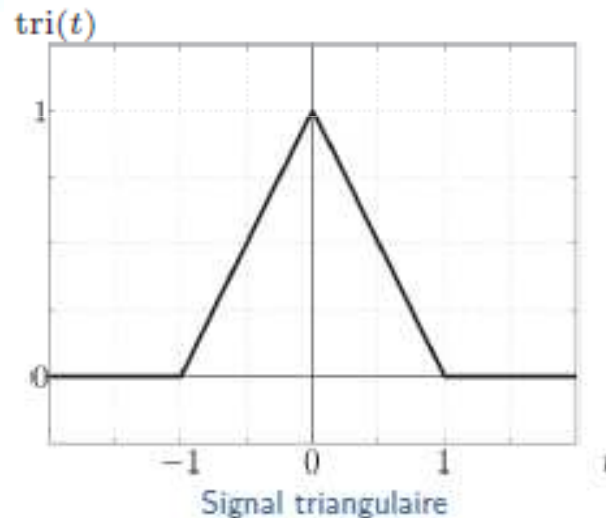
Sa surface est égale à l'unité. A partir de ce signal, on peut obtenir une impulsion rectangulaire de durée T , d'amplitude A centrée en $t = \tau$ notée :

$$A \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

Signaux

- Impulsion ou signal triangulaire : le signal triangulaire, noté $\text{tri}(t)$ ou $\Lambda(t)$, est défini par :

$$\text{tri}(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$



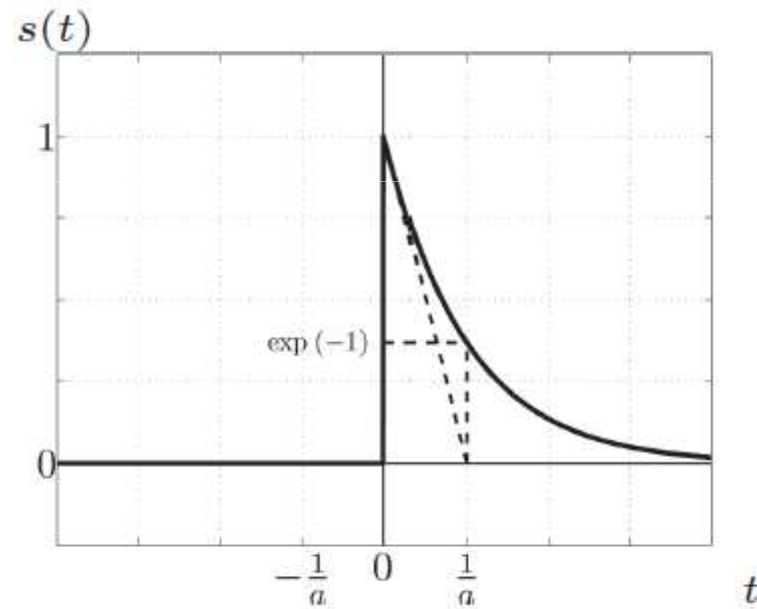
Sa surface est égale l'unité. A partir de ce signal, on peut obtenir une impulsion triangulaire de base $2T$, d'amplitude maximum A centrée en $t = \tau$ notée

$$A \text{tri} \left(\frac{t-\tau}{T} \right)$$

Signaux

- Impulsion exponentielle est définie par :

$$s(t) = \exp(-at) \cdot \Gamma(t), \quad a \in \mathbb{R}^{+*}.$$



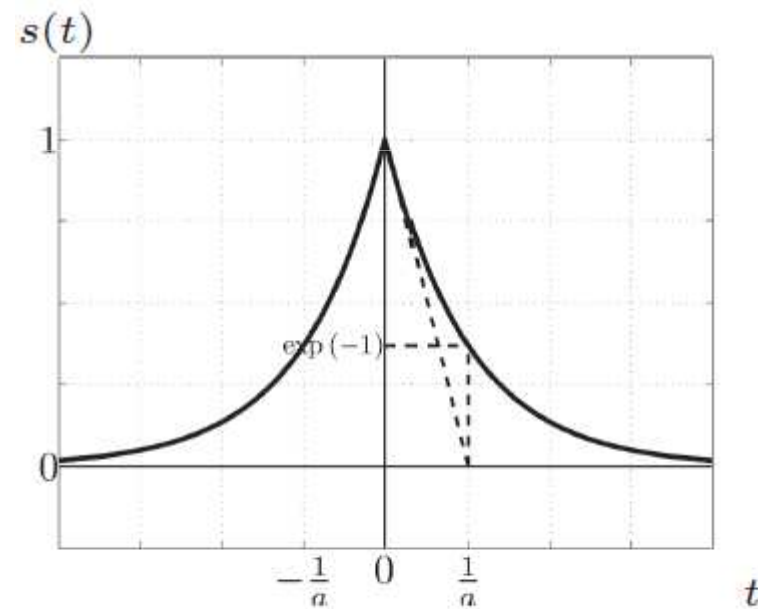
Impulsion exponentielle

Sa surface est égale à l'unité. L'impulsion exponentielle permet d'amortir n'importe quel signal.

Signaux

- Impulsion exponentielle double est définie par :

$$s(t) = \exp(-a|t|), \quad a \in \mathbb{R}^{+*}.$$



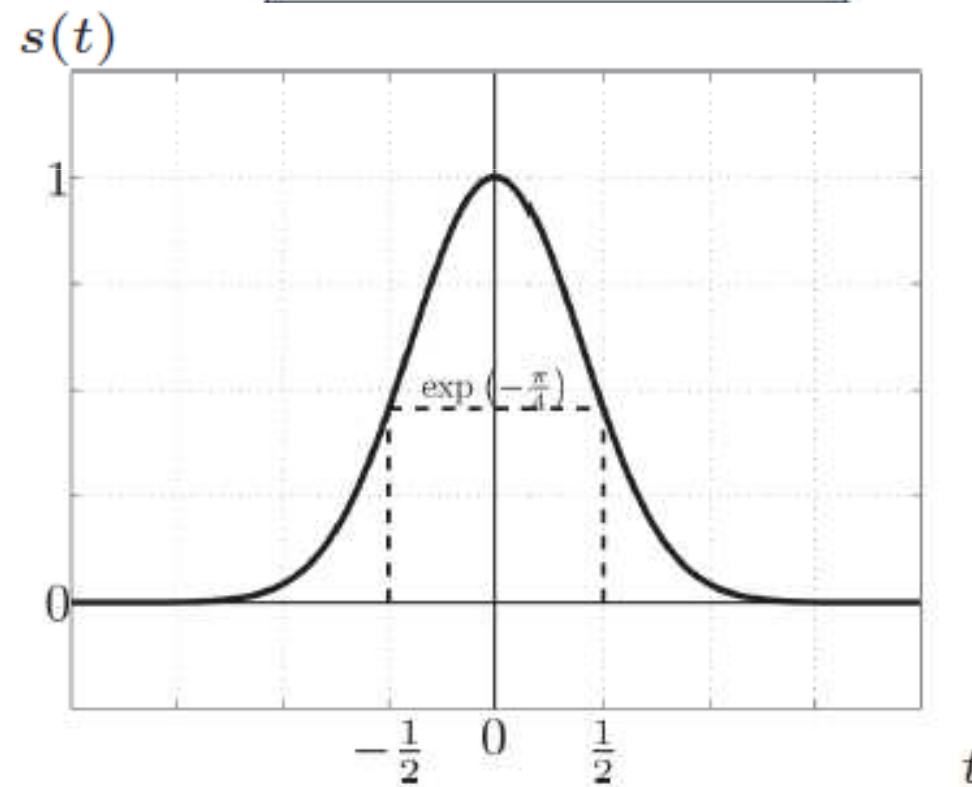
Impulsion exponentielle double

Sa surface est égale à 2.

Signaux

- Impulsion gaussienne est définie par :

$$s(t) = \exp(-\pi t^2) .$$

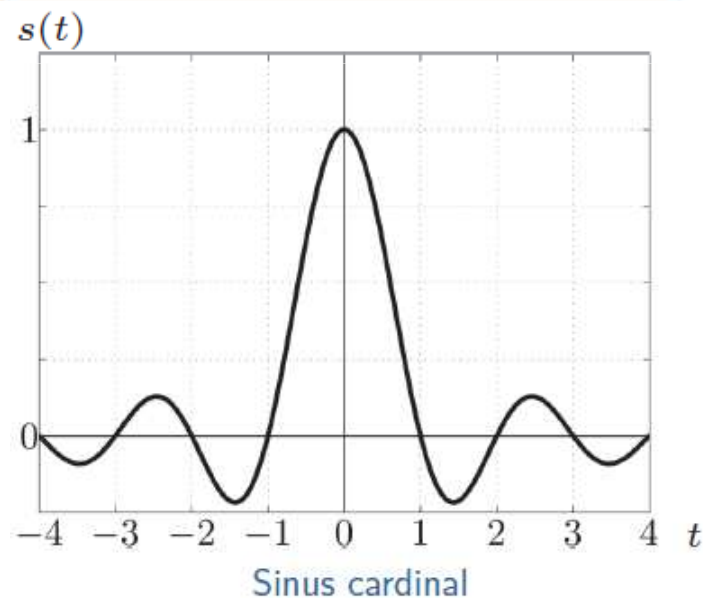


Impulsion gaussienne

Signaux

- signal sinus cardinal, noté $\text{sinc}(t)$, est défini par :

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$



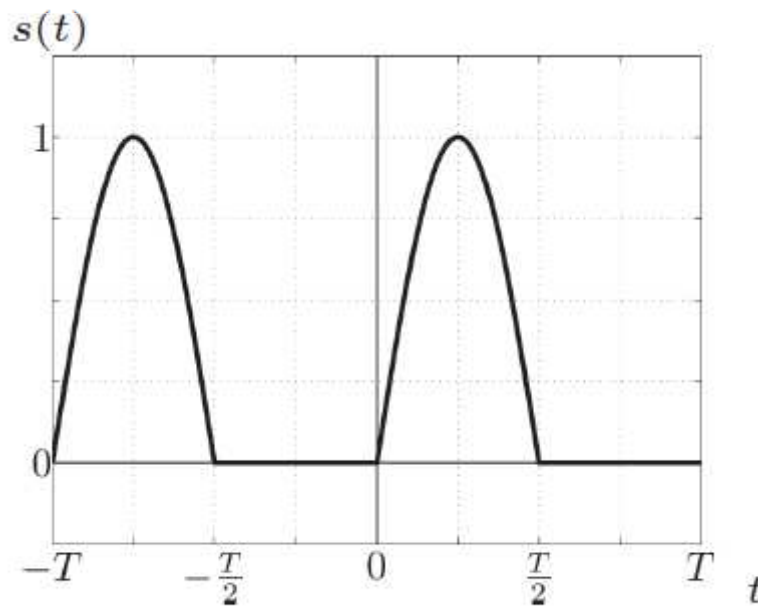
Remarque : par erreur, la fonction sinus cardinal est souvent définie par :

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

Signaux

- Signal sinusoïdale redressé simple alternance : la sinusoïde redressée simple alternance (ou mono-alternance) de période T est définie par :

$$s(t) = \frac{1}{2} \left[\left| \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right| - \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right]$$

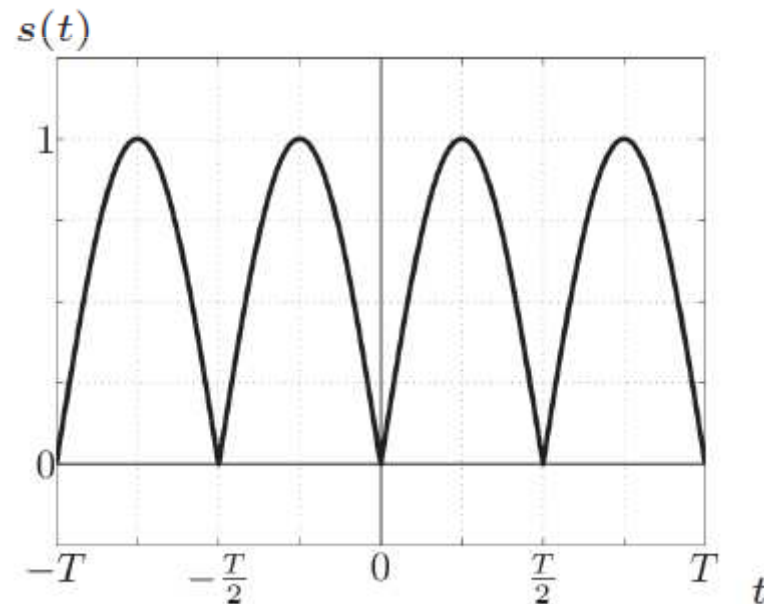


Signal simple alternance

Signaux

- Signal sinusoïdale redressé double alternance : la sinusoïde redressée double alternance (ou bi-alternance) de période T est définie par :

$$s(t) = \left| \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \right|.$$

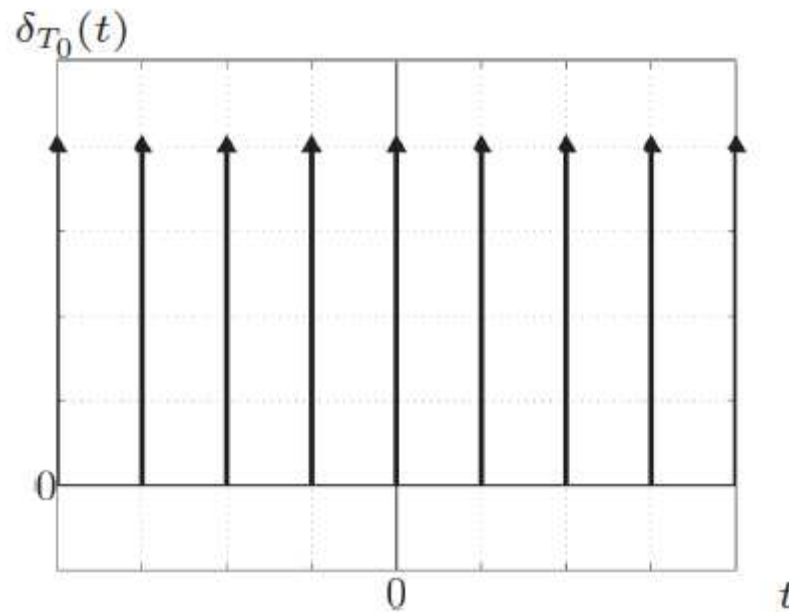


Signal double alternance

Signaux

- Peigne de Dirac : le peigne de Dirac noté $\delta_{T_0}(t)$ ou $P_{\text{gn}T_0}(t)$ est une suite périodique d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de période T_0 :

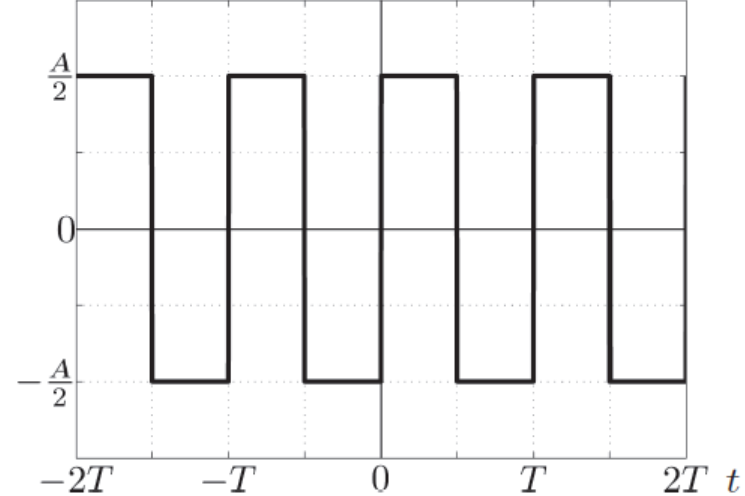
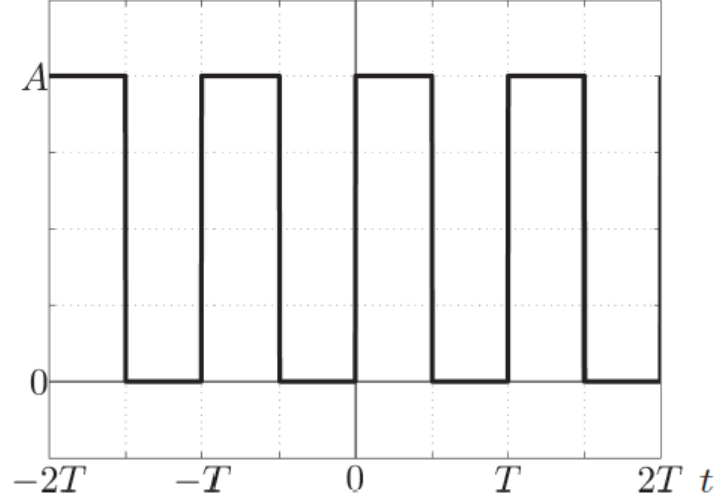
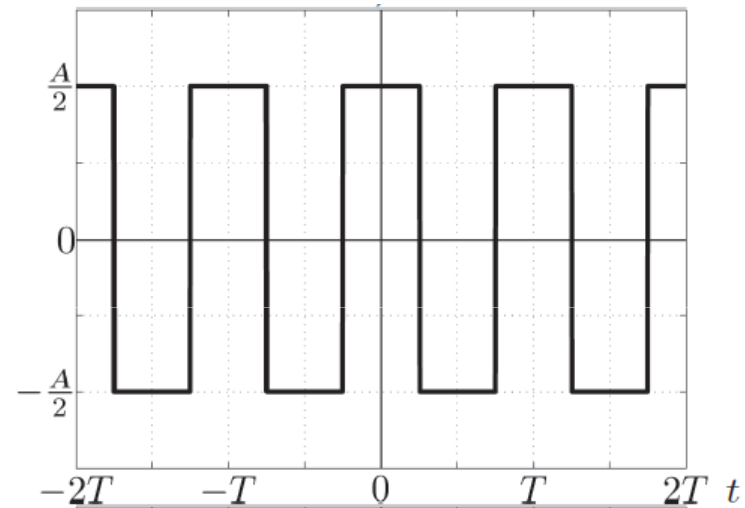
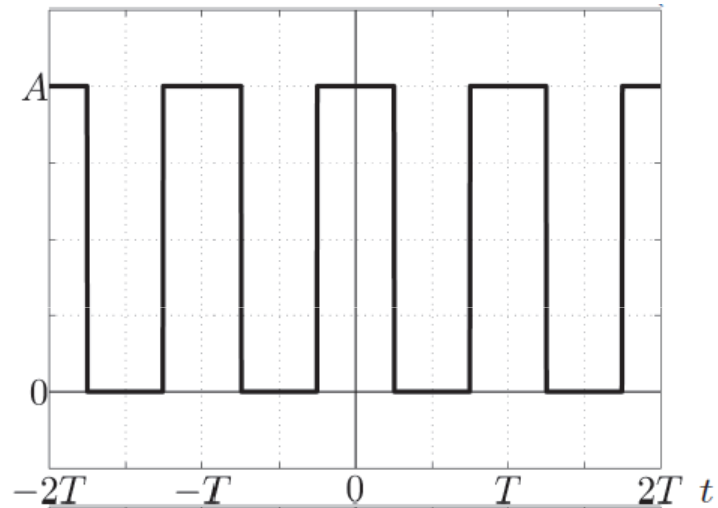
$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0), k \in \mathbb{N}.$$



Peigne de Dirac

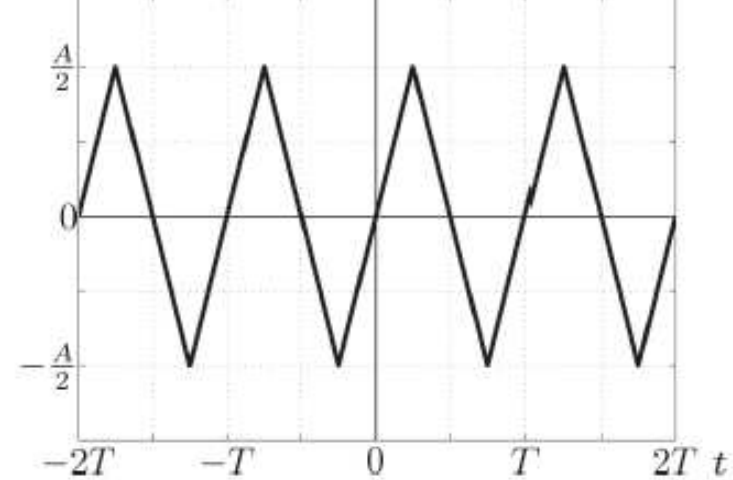
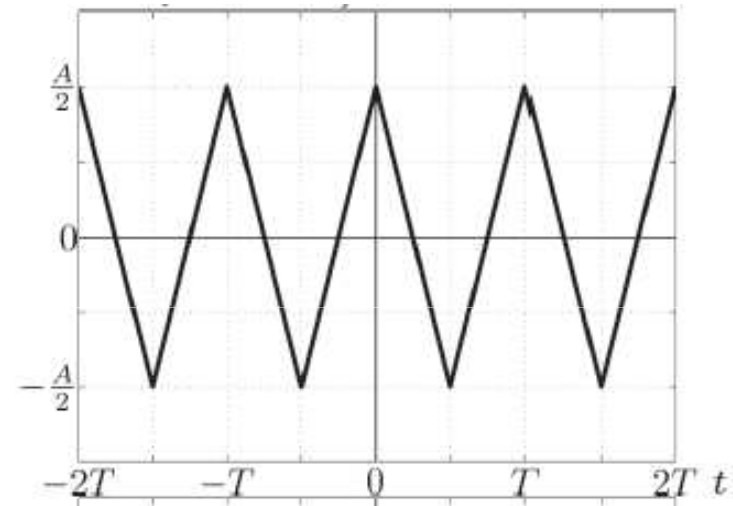
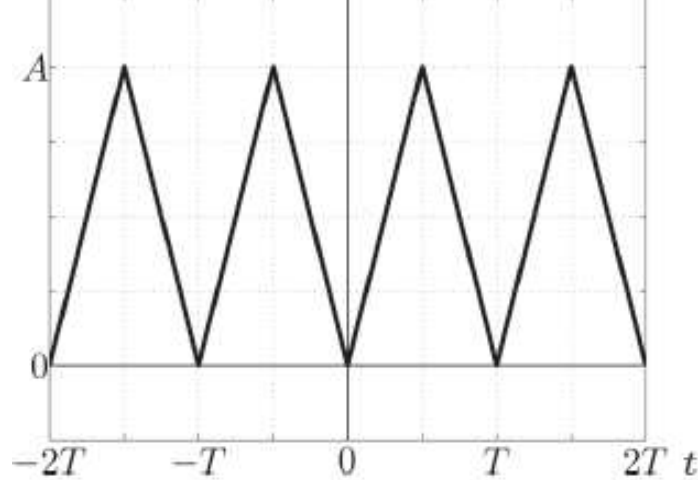
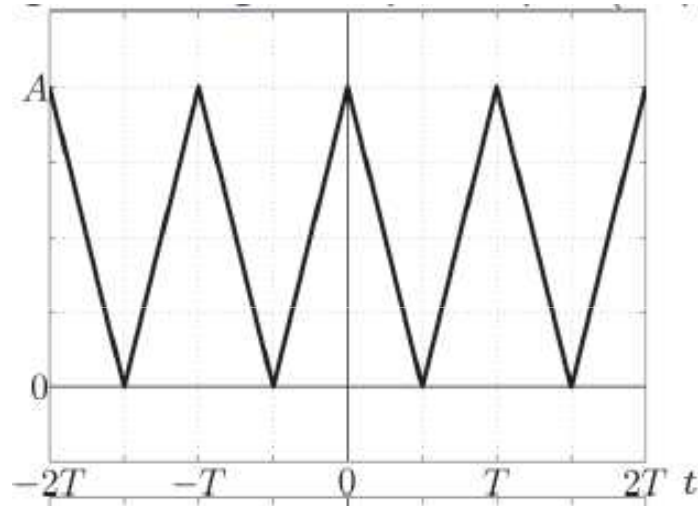
Signaux

- Signaux rectangulaires périodiques (amplitude A , période T) :



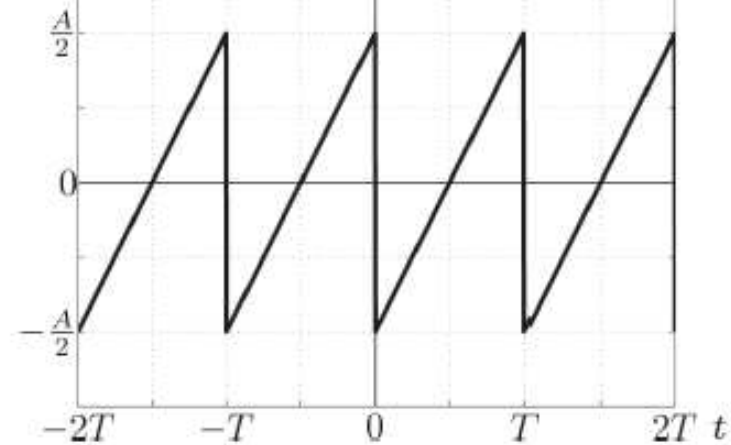
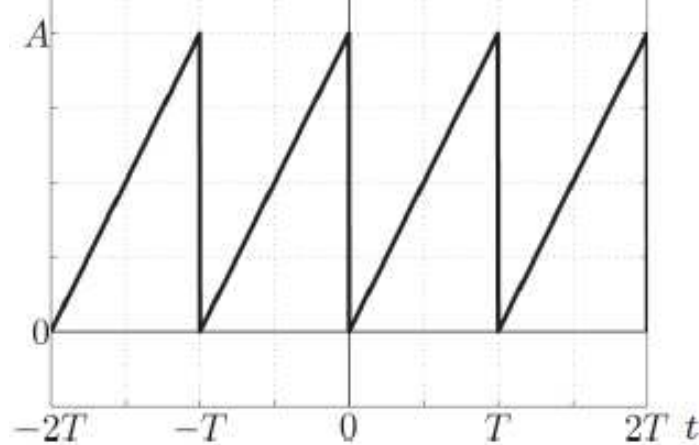
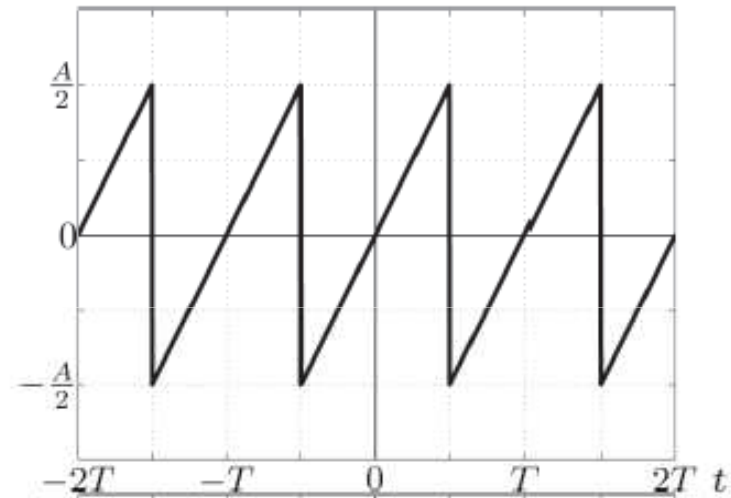
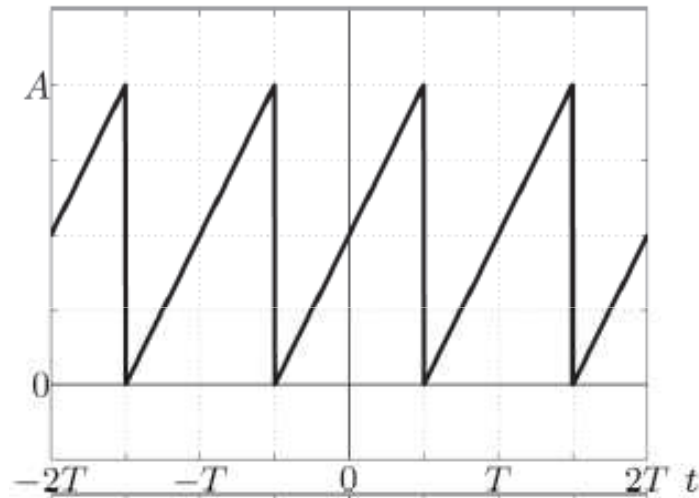
Signaux

- Signaux triangulaires périodiques (amplitude A , période T) :



Signaux

- Signaux dents de scie périodiques (amplitude A , période T) :



Systemes

Définitions :

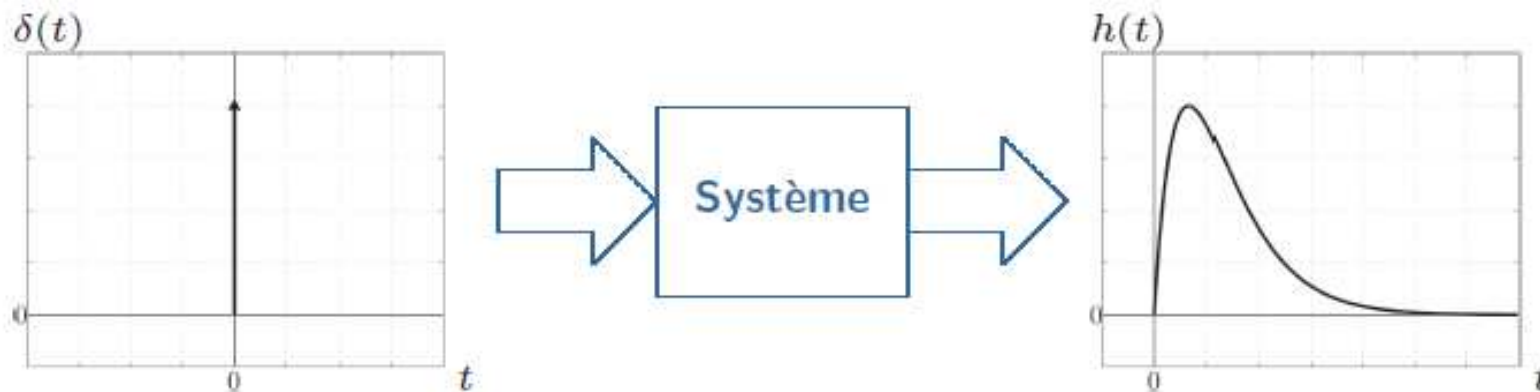
- Système intemporel (stationnaire ou invariant) : les caractéristiques du système n'évoluent pas au cours du temps. Une expérience réalisée à l'instant t donnera les mêmes résultats une heure après, le lendemain ou un an plus tard.
- Système linéaire et système non linéaire : un système linéaire vérifie le principe de superposition, à savoir, la réponse d'une somme d'excitations est égale à la somme des réponses des excitations correspondantes.
- Système mono-variable et système multi-variable : un système est mono-variable (S.I.S.O.) si il possède une seule entrée et une seule sortie et multi-variable dans le cas contraire (M.I.M.O., M.I.S.O, S.I.M.O).

Systemes

- Systeme continu et systeme echantillonne.
- Systeme causal : un systeme est causal si sa reponse ne precede jamais l'excitation qui lui correspond. La reponse a un instant t_0 ne depend pas de l'excitation a un instant $t < t_0$.
- Systeme deterministe et systeme stochastique : un systeme est deterministe si pour chaque excitation ne correspond qu'une seule reponse et stochastique si plusieurs reponses existent.

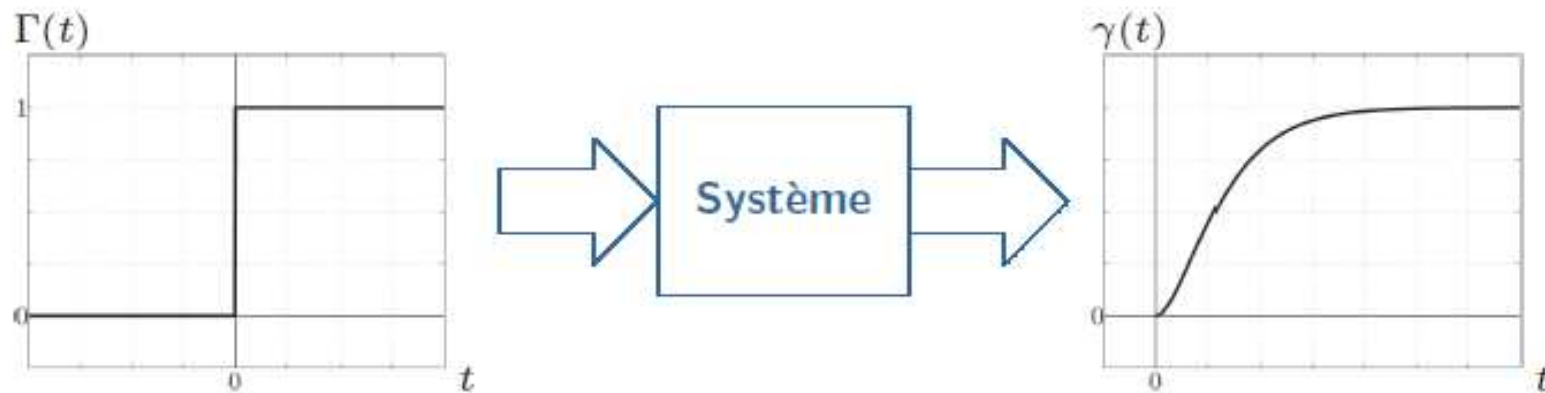
Systemes

- Réponse impulsionnelle (ou percussionnelle) : une brève impulsion, injectée à l'entrée d'un système causal, linéaire, continu et invariant donne en sortie un signal de durée finie appelée réponse impulsionnelle. La réponse impulsionnelle, notée $h(t)$ est donc la réponse d'un système à une impulsion de Dirac.



Systemes

- Réponse indicielle, notée $\gamma(t)$, est la réponse d'un système à un échelon unitaire.



Transformée de Fourier

Introduction

La transformée de Fourier est l'outil mathématique permettant d'obtenir une représentation fréquentielle des signaux déterministes.

Elle a pour but de représenter, l'amplitude, la phase, l'énergie ou la puissance d'un signal en fonction de sa fréquence notée f et permet ainsi son analyse spectrale ou harmonique.

La transformée de Fourier est l'analyse d'un signal sous forme d'une infinité de composantes sinusoïdales complexes.

Transformée de Fourier

Définition de la transformée de Fourier

- Transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal $s(t)$:

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt,$$

où $S(f)$ est appelé le spectre complexe du signal $s(t)$.

- Transformée de Fourier inverse $s(t)$ de $S(f)$:

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1} \{S(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \exp(j2\pi ft) df,$$

avec $\exp(-j2\pi ft) = \cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)$,

et : $\exp(j2\pi ft) = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)$.

Transformée de Fourier

Notation complexe

- Parties réelle $\Re[S(f)]$ et imaginaire $\Im[S(f)]$ de la transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal $s(t)$:

$$S(f) = \Re[S(f)] + j\Im[S(f)],$$

avec

$$\Re[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt,$$

$$\Im[S(f)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

- Module $|S(f)|$ et argument $\arg[S(f)]$ de la transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal $s(t)$ (spectre d'amplitude et spectre de phase) :

$$S(f) = |S(f)| \exp(j \arg[S(f)]),$$

avec :

$$|S(f)| = \{\Re^2[S(f)] + \Im^2[S(f)]\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\arg[S(f)] = \arctan \left\{ \frac{\Im[S(f)]}{\Re[S(f)]} \right\}.$$

Transformée de Fourier

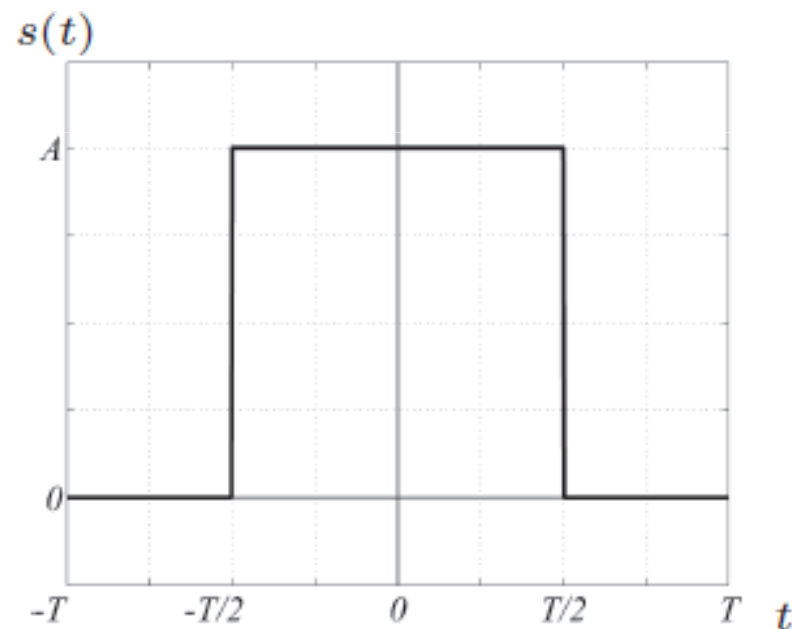
Conditions d'existence

- Toutes les fonctions de carré sommable (ou intégrable), c'est à dire tous les signaux d'énergie finie possèdent une transformée de Fourier dont la réciproque existe également et est de carré sommable. Cela concerne tous les signaux physiquement réalisables puisqu'ils sont observés sur un temps fini.
- Les signaux à puissance moyenne finie possèdent une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisables comme les signaux périodiques ou certaines distributions qui correspondent à des modèles mathématiques. En théorie il n'est pas possible de leur attribuer une transformée de Fourier mais en pratique cela est possible si ils sont observés sur un temps fini.

Transformée de Fourier

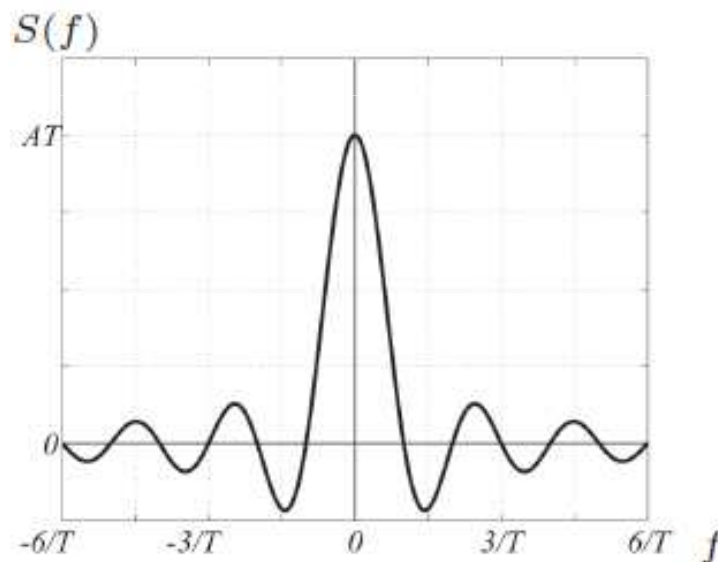
Exemple

- Signal porte $s(t) = A \cdot \text{rect}(t/T)$ (impulsion rectangulaire de largeur T et d'amplitude A) défini sur $\mathbb{R}$ par :

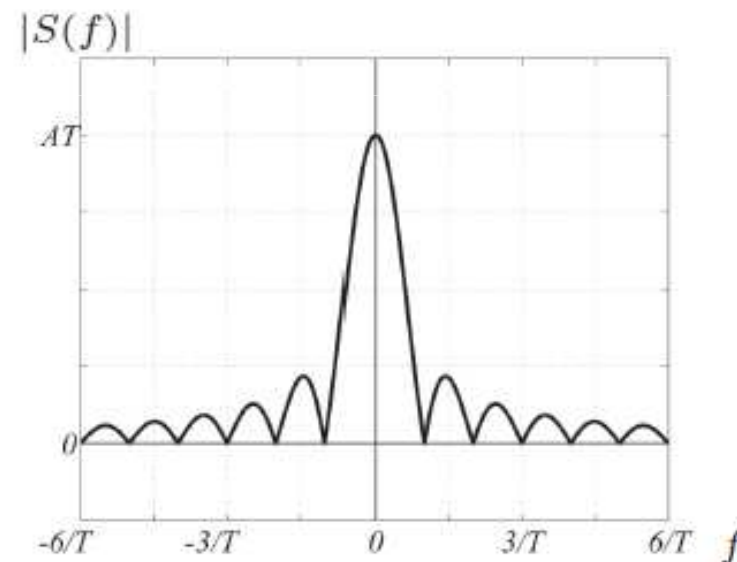


Transformée de Fourier

- Spectre en fréquence : le spectre complexe du signal $s(t)$ est une fonction réelle. Sa partie imaginaire est donc nulle et son module est égale à la valeur absolue de sa partie réelle.



spectre réel
 $S(f) = AT \text{sinc}(Tf)$.



spectre d'amplitude
 $|S(f)| = |AT \text{sinc}(Tf)|$.

Transformée de Fourier

Propriétés

- Linéarité ou superposition

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$f(t)$	$F(f)$
$g(t)$	$G(f)$
$h(t)$	$H(f)$
$h(t) = af(t) + bg(t)$	$H(f) = aF(f) + bG(f)$

- Homothétie, changement d'échelle ou similitude

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$g(t) = f(at)$	$G(f) = \frac{1}{ a } F\left(\frac{f}{a}\right)$
$g(t) = \frac{1}{ a } f\left(\frac{t}{a}\right)$	$G(f) = F(af)$
$g(t) = f(-t)$	$G(f) = F(-f)$

Transformée de Fourier

- Translation temporelle (retard) et fréquentielle

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$g(t) = f(t - t_0)$	$G(f) = \exp(-j2\pi f t_0) F(f)$
$g(t) = \exp(j2\pi f_0 t) f(t)$	$G(f) = F(f - f_0)$

- Dérivation temporelle et fréquentielle

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$g(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p}$	$G(f) = (j2\pi f)^p F(f)$
$g(t) = (-j2\pi t)^p f(t)$	$G(f) = \frac{d^p F(f)}{df^p}$

- Intégration temporelle et fréquentielle

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$g(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$	$G(f) = \frac{F(f)}{j2\pi f}$
$g(t) = \frac{f(t)}{-j2\pi t}$	$G(f) = \int_{-\infty}^f F(u) du$

Transformée de Fourier

- Symétrie

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
signal complexe : $g(t) = \bar{f}(t)$	$G(f) = \bar{F}(-f)$
signal réel : $f(t) = \bar{f}(t)$	$F(f) = \bar{F}(-f)$
signal pair : $f(t) = f(-t)$	$F(f) = F(-f) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt$
signal impair : $f(t) = -f(-t)$	$F(f) = -F(-f) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ft) dt$
signal réel	spectre complexe
signal réel pair	spectre réel pair
signal réel impair	spectre imaginaire impair
signal imaginaire	spectre complexe
signal imaginaire pair	spectre imaginaire pair
signal imaginaire impair	spectre réel impair

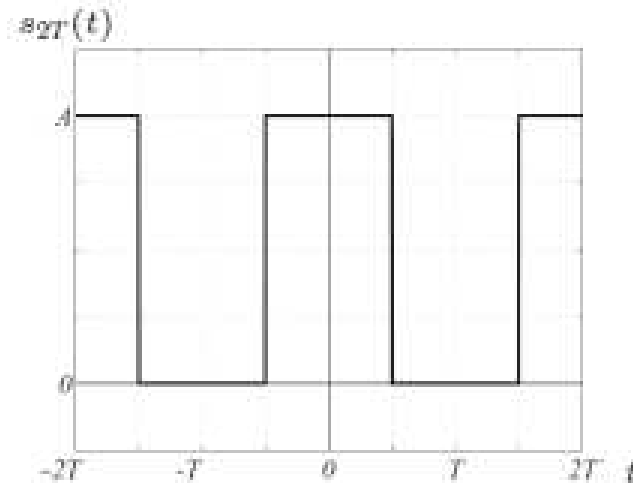
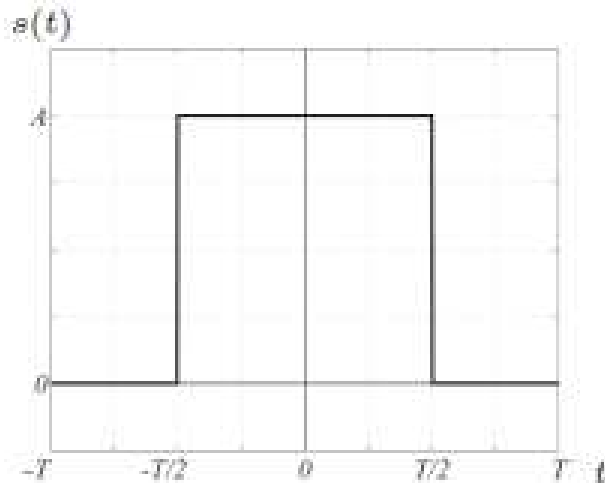
Transformée de Fourier

Transformée de Fourier d'un signal périodique

- Signal périodique : un signal périodique $s_T(t)$ de période T est la répétition à l'infini avec une période T d'un signal $s(t)$ définie sur l'intervalle T et appelée motif. Les signaux périodiques sont ainsi définis par la relation :

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s_T(t) = s_T(t + T)$.



Transformée de Fourier

- Forme exponentielle du développement en série de Fourier d'un signal périodique $s_T(t)$ de période T :

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(jn\omega t), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Cette forme est appelée le développement (ou décomposition) en série de Fourier à coefficients complexes du signal $s_T(t)$. Les coefficients c_n sont les coefficients complexes de la série de Fourier ou coefficients de Fourier exponentiels :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T s_T(t) \exp(-jn\omega t) dt.$$

$c_n \exp(jn\omega t)$ est l'harmonique d'ordre n du signal $s_T(t)$. L'harmonique d'ordre 1 est appelé le fondamental et l'harmonique d'ordre 0 correspond à la valeur moyenne du signal $s_T(t)$.

Transformée de Fourier

- Transformée de Fourier $S_T(f)$ d'un signal périodique $s_T(t)$ de période T :

$$S_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta \left(f - \frac{n}{T} \right).$$

Le spectre d'un signal périodique est donc un spectre de raies puisque c'est la somme d'impulsions de Dirac décalées de $1/T$ de poids pondérés par les coefficients c_n appelés composantes du spectre.

Si $S(f)$ est la transformée de Fourier du motif $s(t)$ de $s_T(t)$, alors :

$$c_n = \frac{1}{T} S \left(\frac{n}{T} \right).$$

$S(f)$ est appelée l'enveloppe complexe de $S_T(f)$.

Transformée de Fourier

- Forme réelle du développement en série de Fourier d'un signal périodique $s_T(t)$ de période T :

$$s_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Cette forme est appelée le développement (ou décomposition) en série de Fourier à coefficients réels du signal $s_T(t)$.

Les coefficients a_n et b_n sont les coefficients réels de la série de Fourier ou coefficients de Fourier trigonométriques :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T s(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est l'harmonique d'ordre n du signal $s_T(t)$. L'harmonique d'ordre 1 correspond au fondamental et l'harmonique d'ordre 0, a_0 est la composante continue qui correspond à la valeur moyenne du signal $s_T(t)$.

Transformée de Fourier

- Relations entre les différentes formes :

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \bar{c}_n,$$

$$|c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\arg(c_n) = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right),$$

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} = 2\Re(c_n), \\ b_n = j(c_n - c_{-n}) = -2\Im(c_n), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{-n} = a_n, \\ b_{-n} = -b_n. \end{cases}$$

Transformée de Fourier

Propriétés des coefficients de Fourier

- Linéarité ou superposition :

Domaine temporel	Coefficients
$f(t)$	c_n^f
$g(t)$	c_n^g
$h(t)$	c_n^h
$h(t) = af(t) + bg(t)$	$c_n^h = ac_n^f + bc_n^g$

- Translation verticale et horizontale :

Domaine temporel	Coefficients
$g(t) = f(t) + a$	$\begin{cases} c_n^g = c_n^f \text{ pour } n \neq 0, \\ c_0^g = c_0^f + a. \end{cases}$
$g(t) = f(t - t_0)$	$\begin{cases} c_n^g = c_n^f \exp(-jn\omega t_0) \text{ pour } n \neq 0, \\ c_0^g = c_0^f. \end{cases}$

Transformée de Fourier

- Dérivation et intégration :

Domaine temporel	Coefficients
$g(t) = \frac{d^p}{dt^p} f(t)$	$c_n^g = (jn\omega)^p c_n^f$
$g(t) = \int_0^t f(u)du$ et $c_0^f = 0$	$c_n^g = \frac{1}{jn\omega} c_n^f$

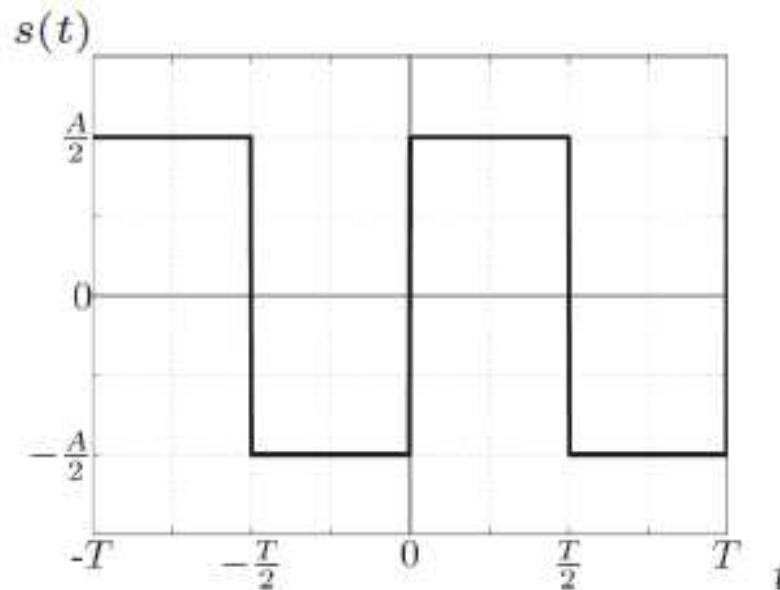
- Symétrie :

Domaine temporel	Coefficients
signal pair : $f(t) = f(-t)$	$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) dt, \\ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos(n\omega t) dt, \\ b_n = 0. \end{cases}$
signal impair : $f(t) = -f(-t)$	$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_n = 0, \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin(n\omega t) dt. \end{cases}$

Transformée de Fourier

Exemple : Décomposition en série de Fourier à coefficients réels du signal carré suivant :

- période T (application numérique : $T = 2\pi$),
- amplitude A (application numérique : $A = 20$),
- moyenne nulle.



Transformée de Fourier

- Le développement en série de Fourier à coefficients réels de $s(t)$ s'écrit donc :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$

Application numérique :

- si n est pair $(-1)^n = 1$ et $b_n = 0$. Les harmoniques de rang pair du signal $s(t)$ sont nuls. En effet, on pose $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}$) et la somme des termes pairs s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{A}{2p\pi} [1 - (-1)^{2p}] \sin(2pt) = 0$$

- Si n est impair $(-1)^n = -1$ et $b_n = 2A/n\pi$. En effet, on pose $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$) et la somme des termes impairs s'écrit :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{2A}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)t) = s(t)$$

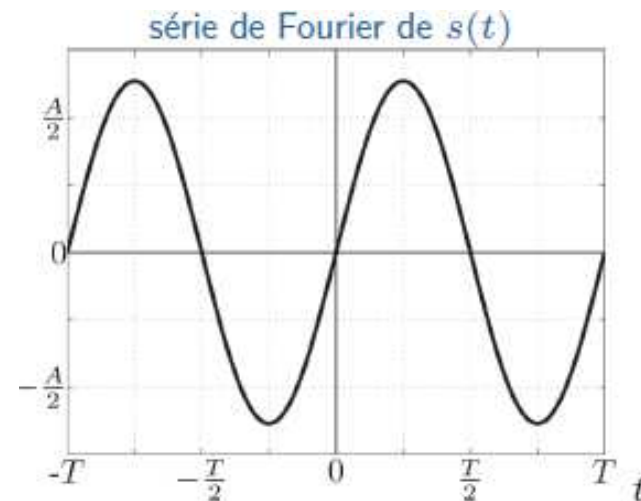
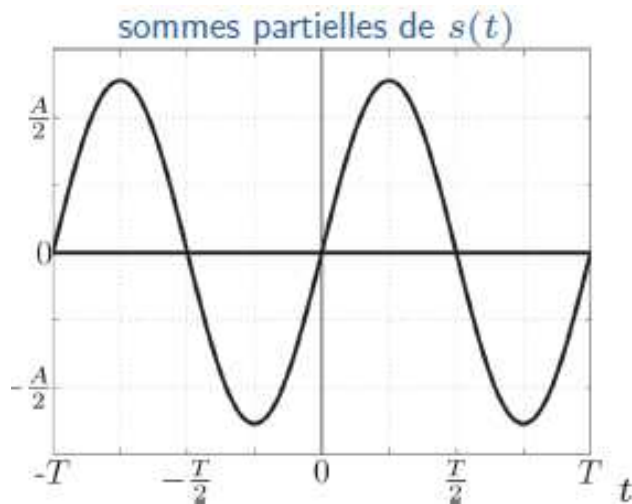
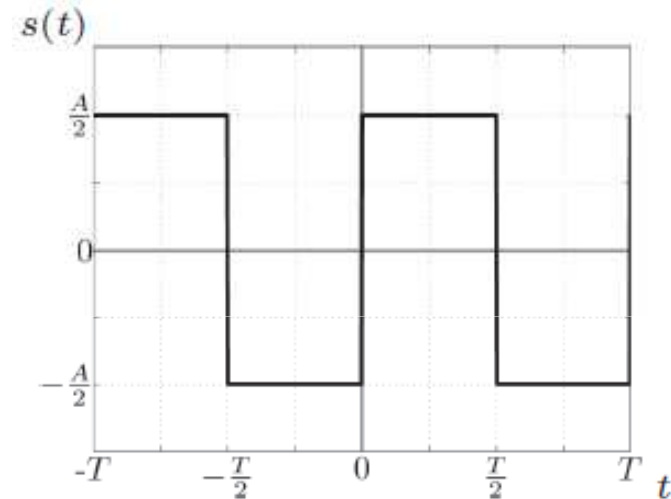
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	0	12,732	0	4,244	0	2,547	0	1,819	0	1,415

Transformée de Fourier

- Signal obtenu en prenant le premier harmonique :

$$s(t) = \sum_{n=1}^1 \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$

$$s(t) = \frac{A}{\pi} \sin(t).$$

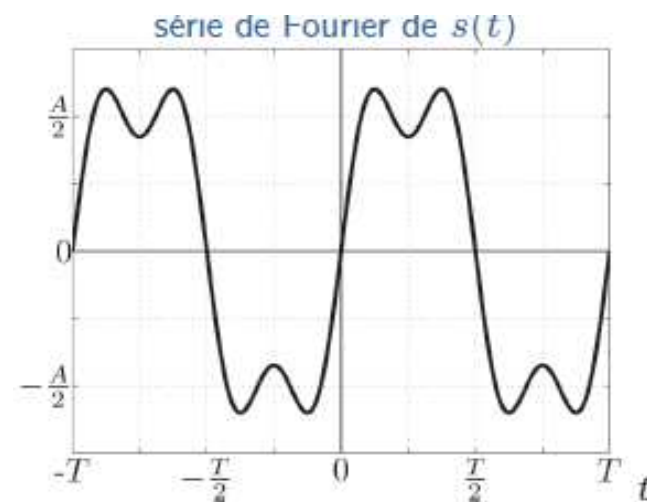
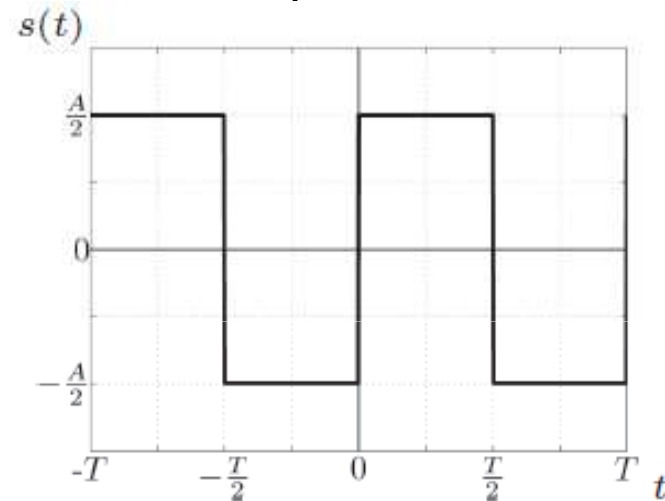
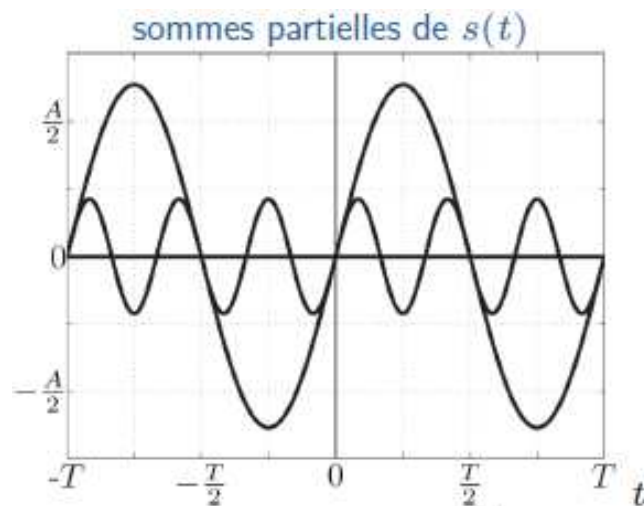


Transformée de Fourier

- Signal obtenu en prenant les 3 premiers harmoniques :

$$s(t) = \sum_{n=1}^3 \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$

$$s(t) = \frac{A}{\pi} \sin(t) + 0 + \frac{A}{3\pi} \sin(3t).$$

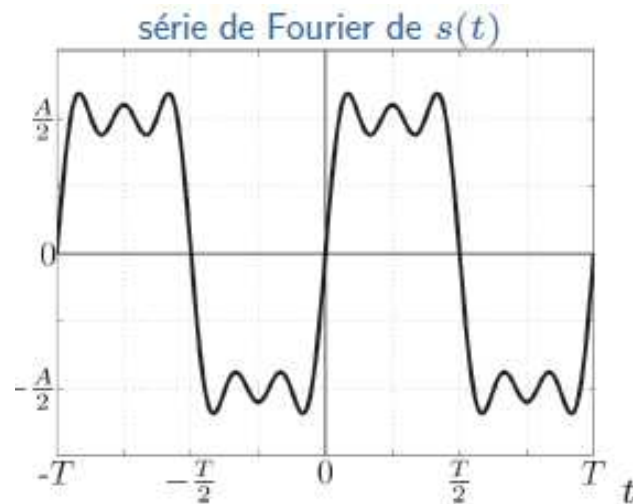
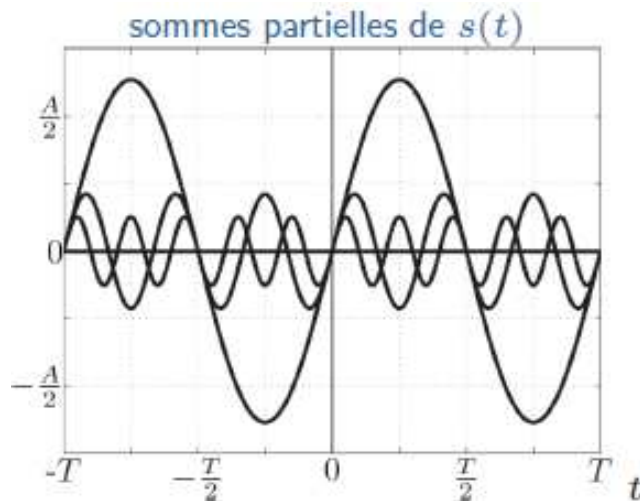
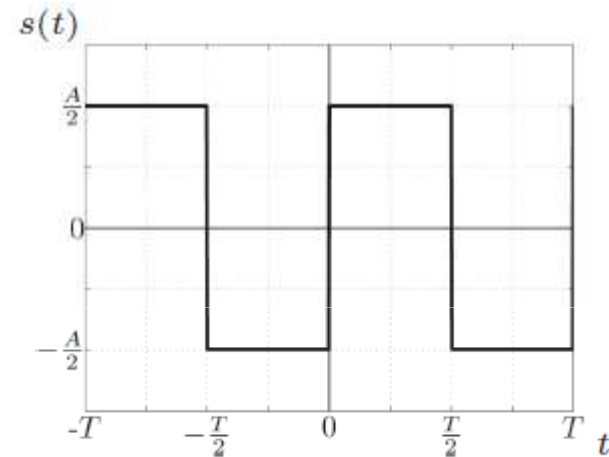


Transformée de Fourier

- Signal obtenu en prenant les 5 premiers harmoniques :

$$s(t) = \sum_{n=1}^5 \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$

$$s(t) = \frac{A}{\pi} \sin(t) + 0 + \frac{A}{3\pi} \sin(3t) + 0 + \frac{A}{5\pi} \sin(5t).$$

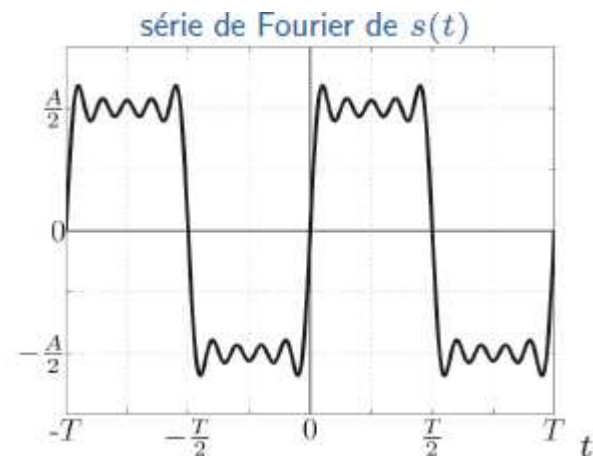
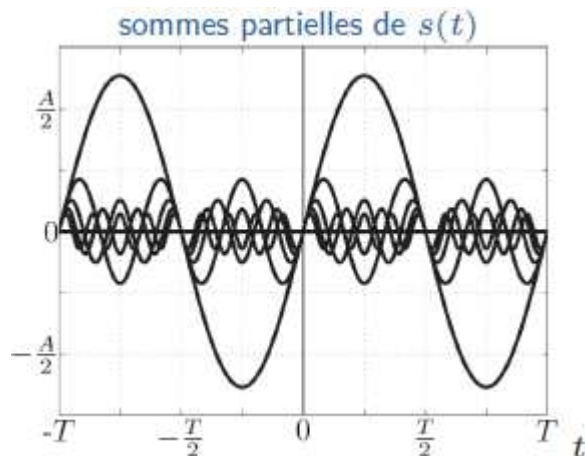
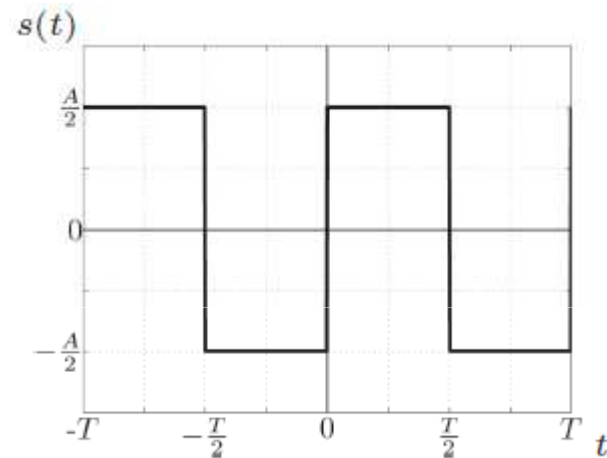


Transformée de Fourier

- Signal obtenu en prenant les 10 premiers harmoniques :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{10} \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$

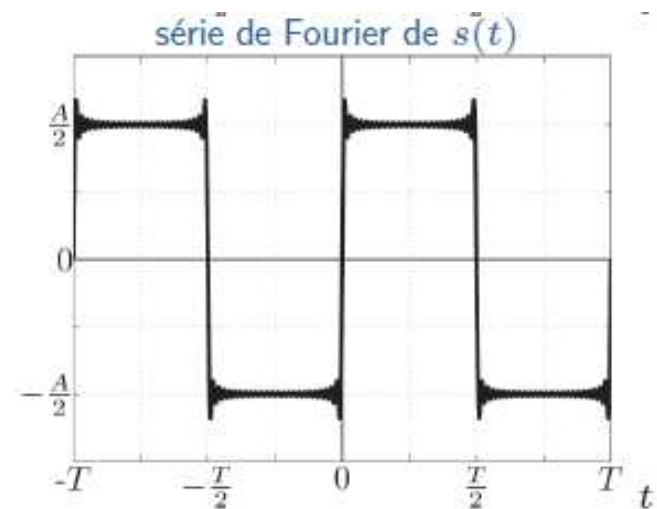
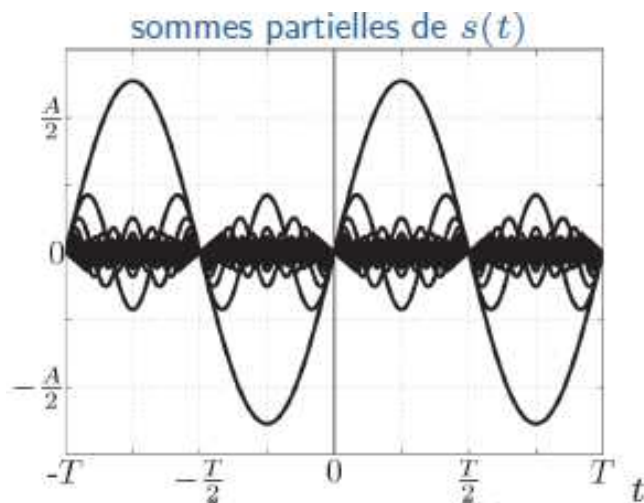
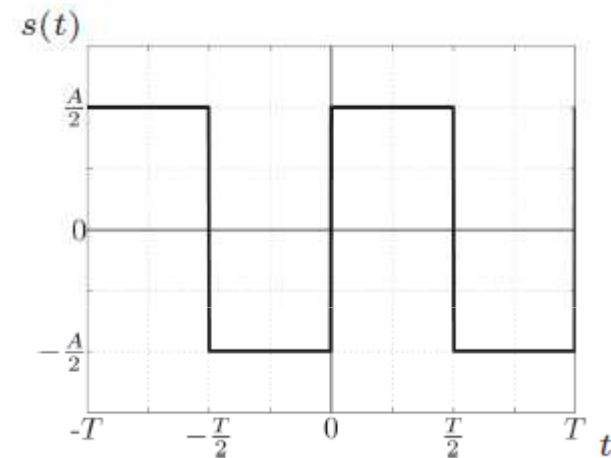
$$s(t) = \frac{A}{\pi} \sin(t) + 0 + \frac{A}{3\pi} \sin(3t) + 0 + \frac{A}{5\pi} \sin(5t) + 0 + \frac{A}{7\pi} \sin(7t) + 0 + \dots$$



Transformée de Fourier

- Signal obtenu en prenant les 50 premiers harmoniques :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{50} \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(nt).$$



Transformée de Fourier

- $S(f)$ est donc un spectre de raies formées de pics de Dirac sur tout l'axe des fréquences (positives ou négatives). Chaque raie a une hauteur proportionnelle soit au module et à l'argument de c_n (spectre d'amplitude et de phase), soit à la partie réelle et à la partie imaginaire de c_n .

Reprenons l'exemple précédent :

$$c_n = -\frac{1}{2}jb_n$$

$$c_n = -j\frac{A}{2n\pi}[1 - (-1)^n] = j\frac{A}{2n\pi}[(-1)^n - 1].$$

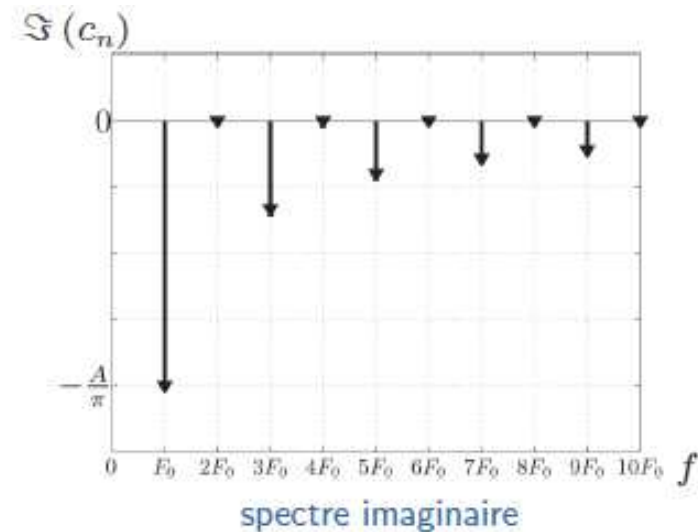
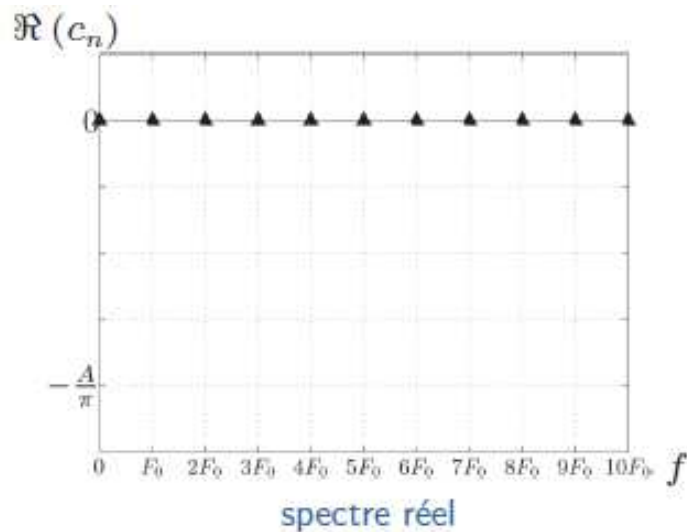
$$\begin{cases} \Re(c_n) = 0, \\ \Im(c_n) = -\frac{A}{2n\pi}[1 - (-1)^n], \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c_n| = \left| \frac{A}{2n\pi}[(-1)^n - 1] \right|, \\ \arg(c_n) = -90^\circ \text{ pour } b_n \neq 0. \end{cases}$$

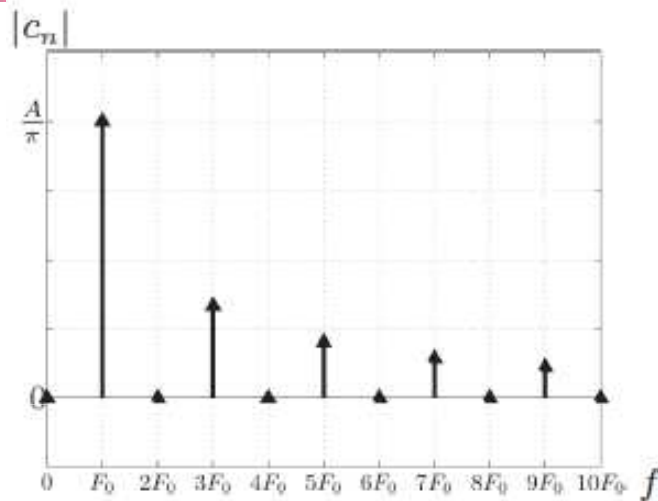
Transformée de Fourier

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\Re(c_n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Im(c_n)$	0	-6,366	0	-2,122	0	-1,273	0	-0,910	0	-0,707
$ c_n $	0	6,366	0	2,122	0	1,273	0	0,910	0	0,707
$\arg(c_n)$	0	-90	0	-90	0	-90	0	-90	0	-90

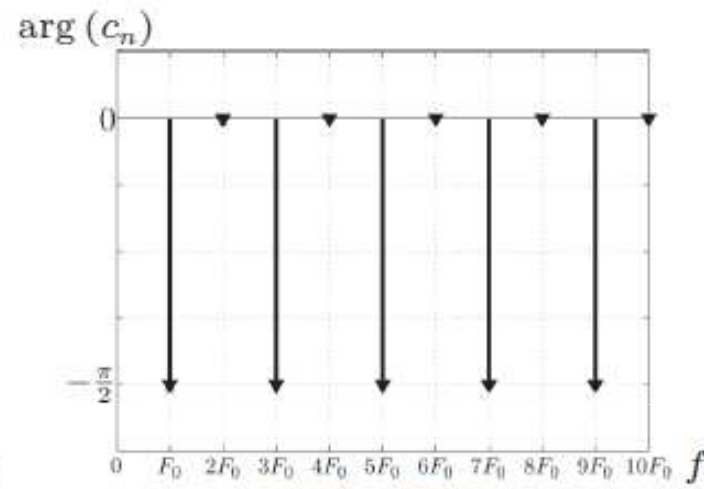
- Représentations fréquentielles :



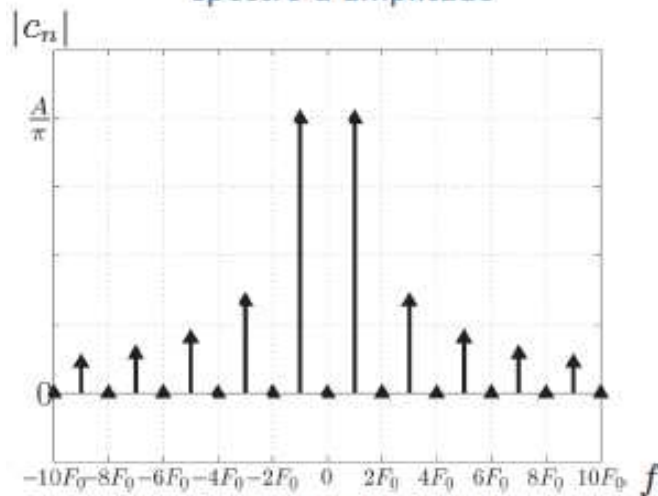
Transformée de Fourier



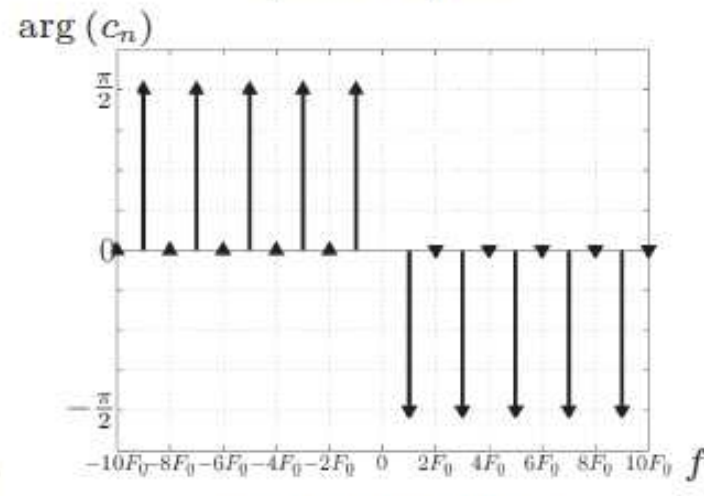
spectre d'amplitude



spectre de phase



spectre d'amplitude bilatéral



spectre de phase bilatéral

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier et transformée de Laplace :

- Transformée de Laplace $S(p)$ d'un signal $s(t)$: la transformée de Laplace est un outil mathématique bien adapté pour le calcul de réponses temporelles et pour l'analyse fréquentielle de signaux causals. Elle est définie par :

$$S(p) = \mathcal{L}\{s(t)\} = \int_0^{+\infty} s(t) \exp(-pt) dt.$$

- Relation avec la transformée de Fourier : si le signal $s(t)$ est **causal** ($s(t) = 0$ pour tout $t < 0$), alors on a la relation :

$$S(f) = \{S(p)\}_{p=j2\pi f=j\omega}.$$

Filtrage

La convolution :

Définition : l'opération de convolution, notée $*$, exprime la réponse $s(t)$ d'un système linéaire, continu et invariant à une entrée quelconque $e(t)$ à partir de sa réponse impulsionnelle $h(t)$ qui le caractérise. Le produit de convolution est défini par :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

- Convolution des signaux périodiques : si $e(t)$ et $h(t)$ sont périodiques de période T , la convolution s'écrit alors :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \frac{1}{T} \int_T e(\tau)h(t - \tau)d\tau.$$

Filtrage

Calcul pratique de la convolution : La valeur du signal de sortie $s(t)$ à l'instant t est obtenue par la sommation (intégrale = sommation continue) pondérée des valeurs passées du signal d'entrée $e(t)$. Ce calcul de la convolution peut être décrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en plusieurs étapes :

1. tracer $e(\tau)$ et $h(\tau)$,
2. retourner $h(\tau)$ pour obtenir $h(-\tau)$
3. décaler $h(-\tau)$ de t pour obtenir $h(t - \tau)$,
4. faire le produit de $h(t - \tau)$ par $e(\tau)$,
5. Calculer l'aire sous la courbe ainsi obtenu (intégrale) pour obtenir la valeur de $s(t)$ à l'instant t .
6. Répéter l'opération pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Filtrage

Propriétés :

- Localisation

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t), \quad \text{d'où} \quad f(t) \cdot \delta(t - a) = f(a) \cdot \delta(t),$$

- Commutativité

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t),$$

- Distributivité

$$[f(t) + g(t)] * h(t) = [f(t) * h(t)] + [g(t) * h(t)],$$

- Associativité

$$[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)],$$

- Élément neutre

$$f(t) * \delta(t) = f(t), \quad \text{d'où} \quad f(t) * \delta(t - a) = f(t - a),$$

- Périodisation

$$f(t) * \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Filtrage

- Théorème de Plancherel : la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

$$\mathcal{F}\{e(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{e(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\} = E(f) \cdot H(f),$$

$$\mathcal{F}\{e(t) \cdot h(t)\} = \mathcal{F}\{e(t)\} * \mathcal{F}\{h(t)\} = E(f) * H(f).$$

L'étude d'un système est donc plus aisée dans le domaine fréquentiel car l'opération de convolution temporelle se transforme en un simple produit.

- Théorème de Borel : la transformée de Laplace d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

$$\mathcal{L}\{e(t) * h(t)\} = \mathcal{L}\{e(t)\} \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} = E(p) \cdot H(p),$$

$$\mathcal{L}\{e(t) \cdot h(t)\} = \mathcal{L}\{e(t)\} * \mathcal{L}\{h(t)\} = E(p) * H(p).$$

Filtrage

Le fenêtrage temporel

- Définition : les moyens d'observation (appareil de mesures, acquisition de données ou sens humains) n'ont pas de performances infinies et le prélèvement d'un signal lui impose donc un temps fini. Certains signaux sont naturellement à durée finie soit parce qu'ils sont interrompus (interrupteur monté sur le circuit d'un haut-parleur), soit parce qu'ils sont atténués (potentiomètre réglant le volume du son). Le fenêtrage temporel est donc l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou atténuer un signal. Le signal de sortie $s(t)$ est ainsi le produit du signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction temporelle $g(t)$:

$$s(t) = e(t) \cdot g(t).$$

- La transformée de Fourier du produit algébrique de deux signaux est le produit de convolution des transformées de Fourier de ces signaux, le fenêtrage temporel modifie le spectre du signal d'entrée :

$$S(f) = E(f) * G(f).$$

Filtrage

Exemple

- L'impulsion rectangulaire (ou signal porte) de largeur T notée $s_{\Pi T}(t)$ permet de modéliser la troncature d'un signal $e(t)$ observé sur un temps fini T . Ainsi le résultat $s(t)$ du produit entre $s_{\Pi T}(t)$ et $e(t)$ est le signal $e(t)$ restreint à l'intervalle de temps T qui devient donc transitoire :

$$s(t) = e(t) \cdot s_{\Pi T}(t).$$

- La transformée de Fourier $S(f)$:

$$S(f) = E(f) * \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}.$$

Filtrage

Le filtrage fréquentiel

- Définition : le filtrage est l'opération qui consiste à prélever, interrompre ou atténuer tout ou partie des composantes fréquentielles d'un signal. Le spectre $S(f)$ d'un signal de sortie $s(t)$ est ainsi le produit du spectre $E(f)$ du signal d'entrée $e(t)$ et de la fonction fréquentielle $H(f)$ du filtre :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f).$$

- Transformée de Fourier inverse d'un filtrage : comme la transformée de Fourier du produit convolution de deux signaux est le produit simple des transformées de Fourier de ces signaux, le filtrage correspond à un produit de convolution dans le domaine temporel et modifie le signal de sortie :

$$s(t) = e(t) * h(t).$$

Un filtre est donc défini par sa réponse impulsionnelle, notée $h(t)$.

Filtrage

Remarques

- Filtre réalisable : Un filtre réel (réalisable) est un opérateur causal ayant des propriétés sélectifs en fonction de la fréquence. Sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est donc nulle pour tout $t < 0$ et il ne peut donc être ni pair, ni impair. Sa transformée de Fourier $H(f)$ est par conséquent complexe et le filtre déphase nécessairement.

Les filtres analogiques continus réalisables sont construit à partir de composants électroniques comme les résistances, les capacités, les self-inductances ou les amplificateurs opérationnels.

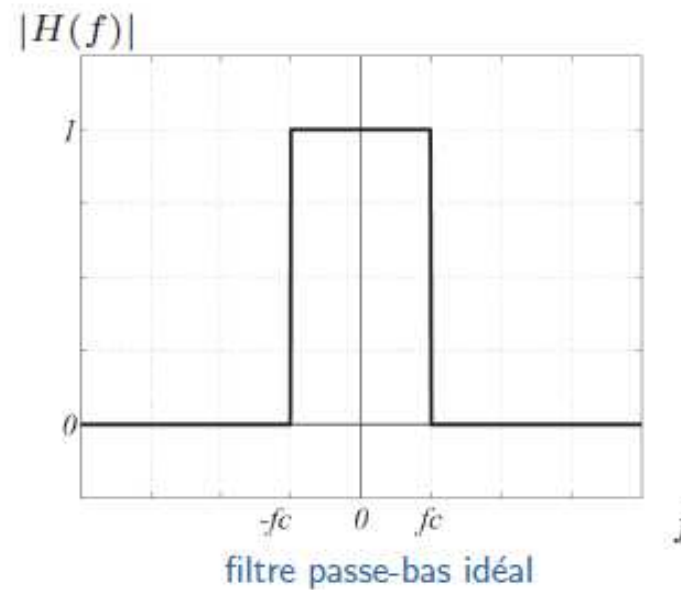
- Filtre idéal : un filtre idéal est un opérateur permettant le transfert sans distorsion de toutes les composantes d'un signal d'entrée comprises dans une largeur de bande spectrale donnée et atténue totalement les autres. Il n'est pas réalisable car il n'est pas causal mais permet d'estimer les performances du filtre réalisable correspondant et définir ainsi le gabarit de ce filtre.

Filtrage

Exemples de filtres idéaux et gabarits

- Filtre passe-bas : c'est un filtre qui laisse passer les basses fréquences.

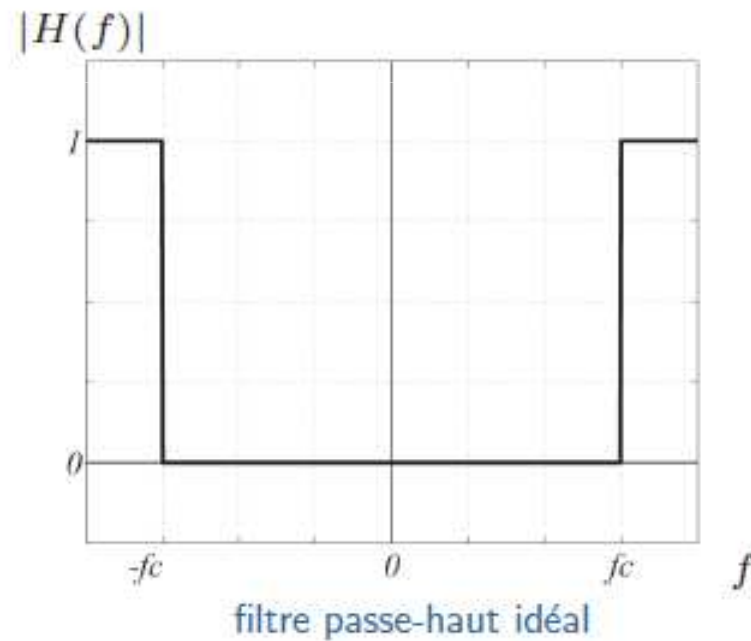
$$H(f) = \begin{cases} \exp(-j2\pi f\tau) & \text{si } |f| \leq f_c, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



Filtrage

- Filtre passe-haut : c'est un filtre qui laisse passer les hautes fréquences.

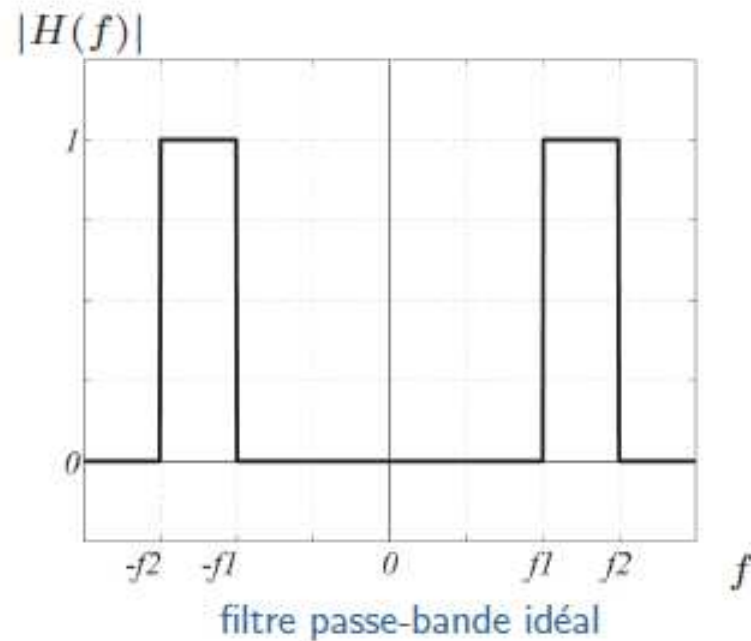
$$H(f) = \begin{cases} \exp(-j2\pi f\tau) & \text{si } |f| \geq f_c, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



Filtrage

- Filtre passe-bande : c'est un filtre qui laisse passer certaines fréquences.

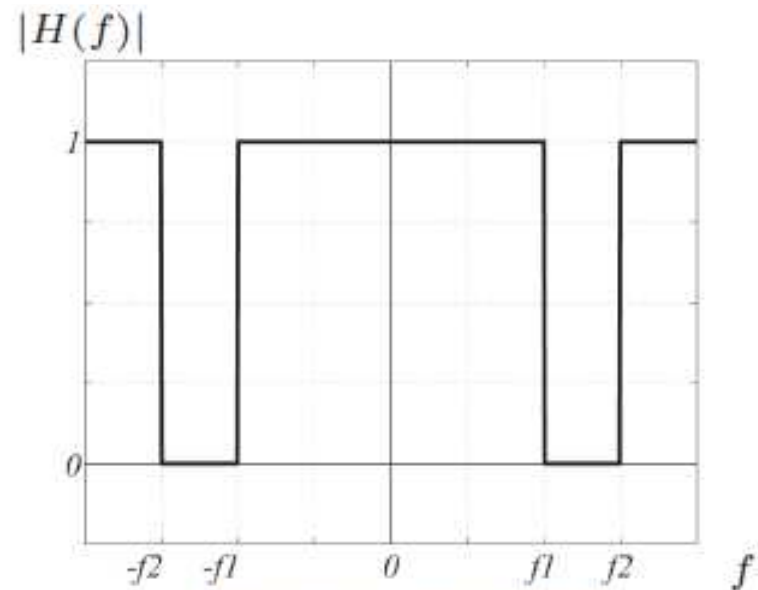
$$H(f) = \begin{cases} \exp(-j2\pi f\tau) & \text{si } f_1 \leq |f| \leq f_2, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



Filtrage

- Filtre coupe-bande : inversement, c'est un filtre qui coupe certaines fréquences.

$$H(f) = \begin{cases} \exp(-j2\pi f\tau) & \text{si } f_1 \geq |f| \geq f_2, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

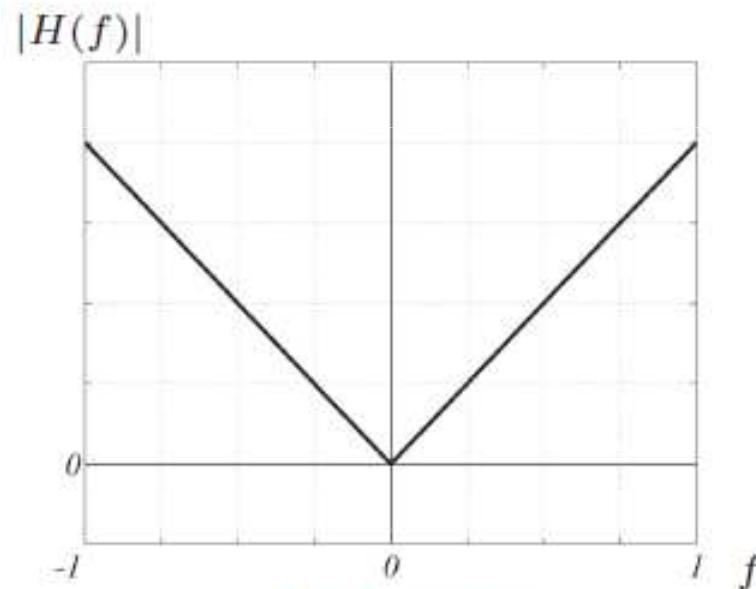


filtre coupe-bande idéal

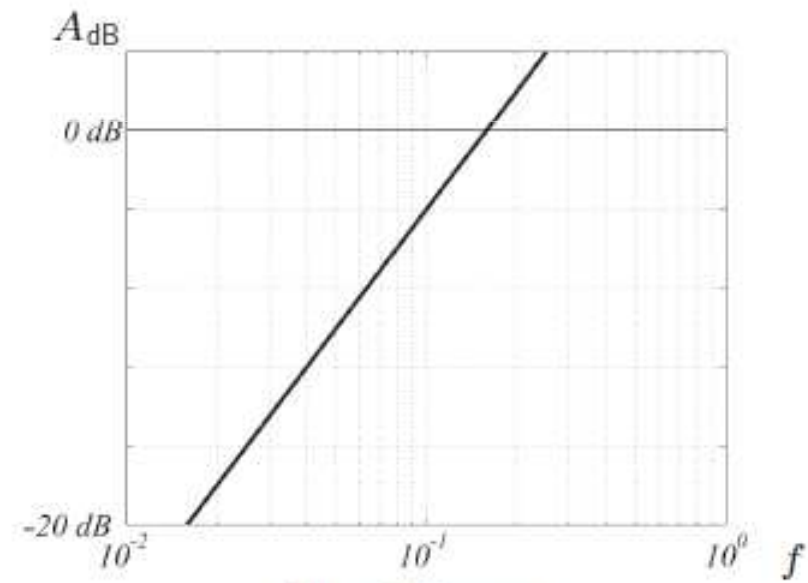
Filtrage

- Filtre dérivateur

$$H(f) = j2\pi f.$$



filtre dérivateur
(échelle logarithmique)

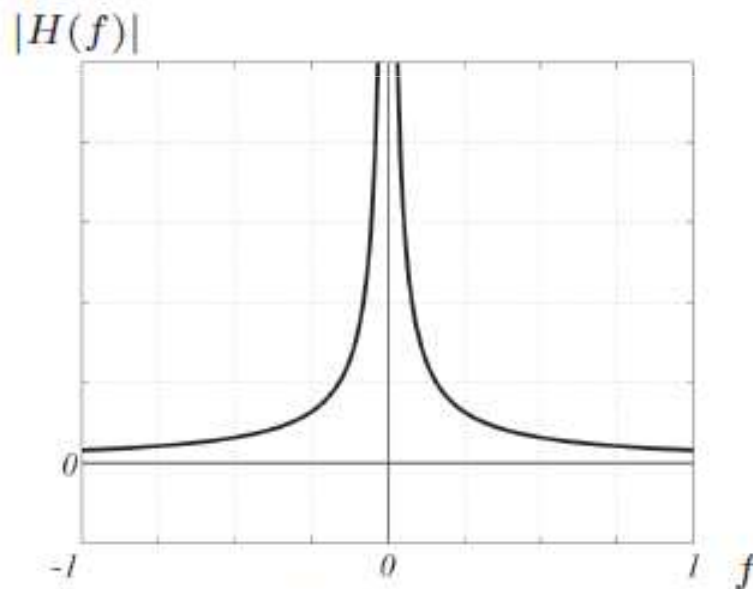


filtre dérivateur
(échelle logarithmique)

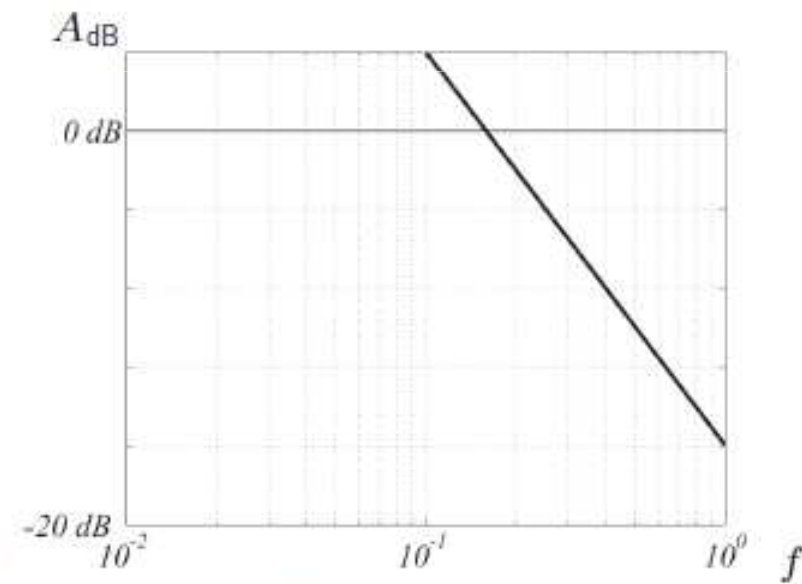
Filtrage

- Filtre intégrateur

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f}$$



filtre intégrateur
(échelle linéaire)



filtre intégrateur
(échelle logarithmique)

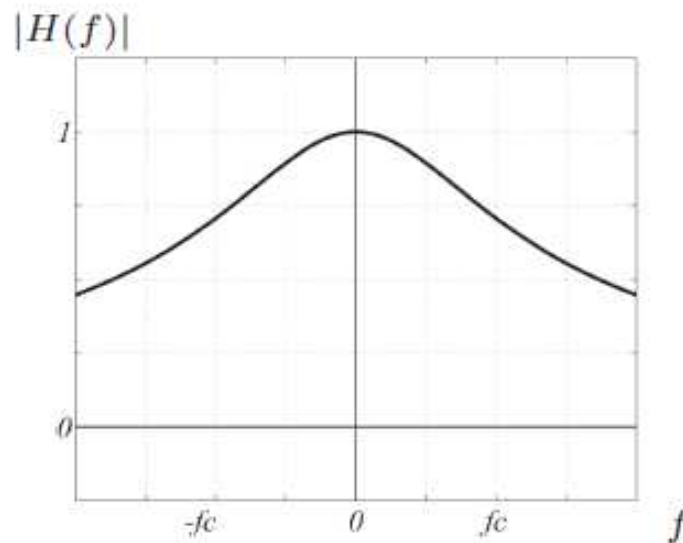
Filtrage

Exemples de filtres réalisables

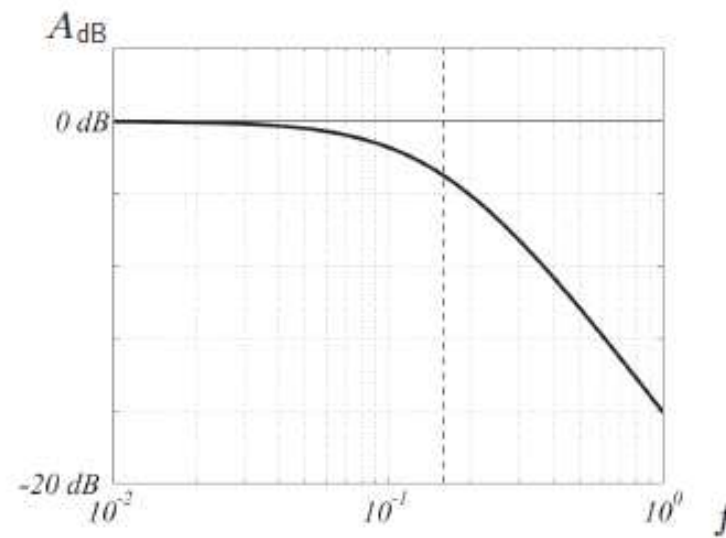
- Filtre passe-bas du premier ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_c}}$$

avec f_c , la fréquence de coupure.



filtre passe-bas du premier ordre
(échelle linéaire)



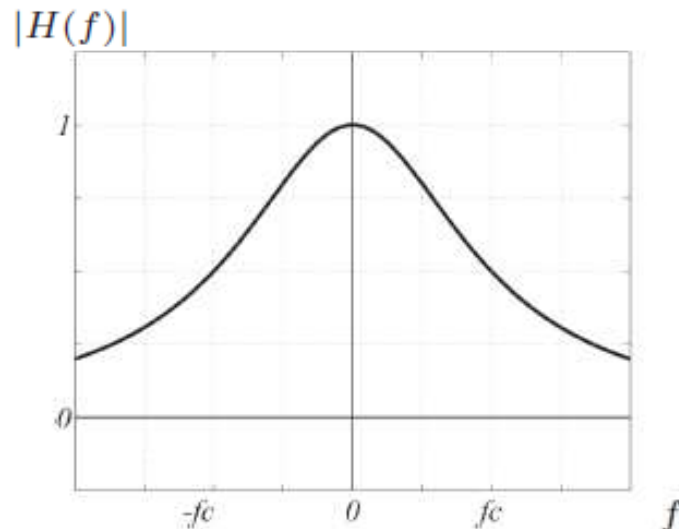
filtre passe-bas du premier ordre
(échelle logarithmique)

Filtrage

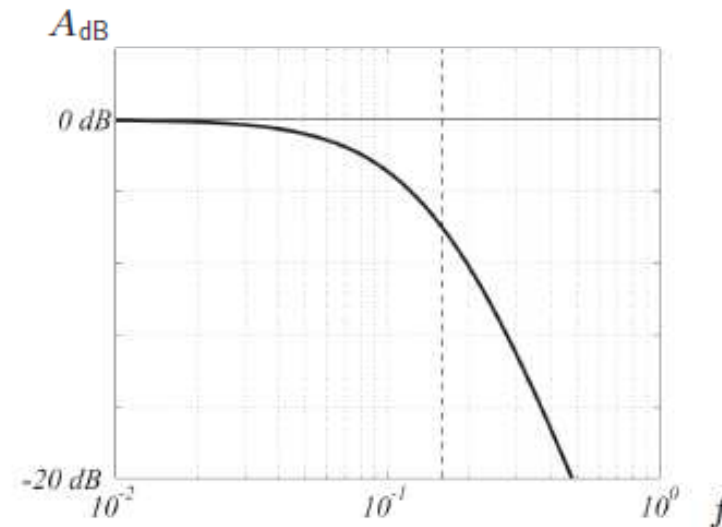
- Filtre pas bas du deuxième ordre

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\xi\frac{f}{f_c} + \left(j\frac{f}{f_c}\right)^2},$$

avec f_c , la fréquence de coupure et ξ , le coefficient d'amortissement.



filtre passe-bas du deuxième ordre
avec $\xi = 1$: $H(f) = \frac{1}{(1+j\frac{f}{f_c})^2}$
(échelle linéaire)



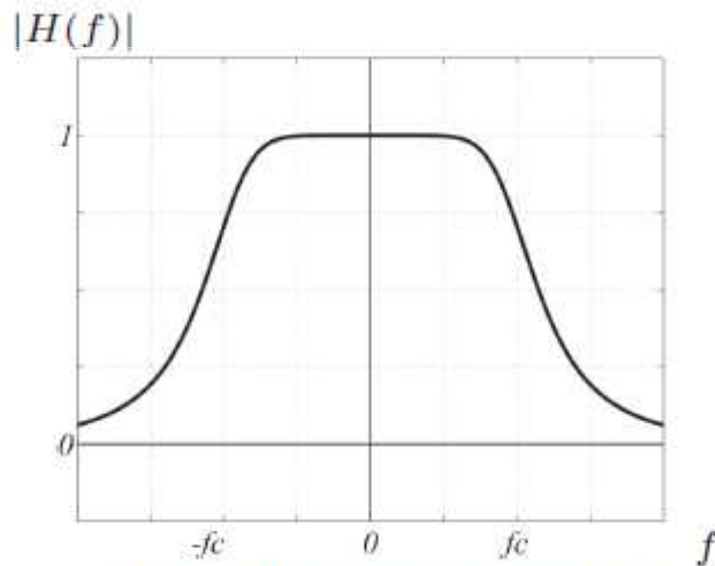
filtre passe-bas du deuxième ordre
avec $\xi = 1$: $H(f) = \frac{1}{(1+j\frac{f}{f_c})^2}$
(échelle logarithmique)

Filtrage

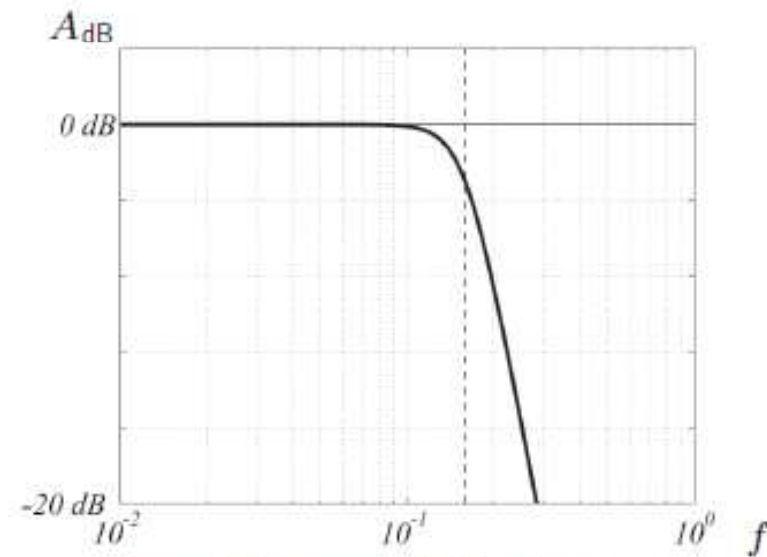
- Filtre de Butterworth

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \left(\frac{f}{f_c} \right)^n}$$

avec f_c , la fréquence de coupure et n , l'ordre du filtre.



filtre de Butterworth d'ordre $n = 4$
(échelle linéaire)



filtre de Butterworth d'ordre $n = 4$
(échelle logarithmique)

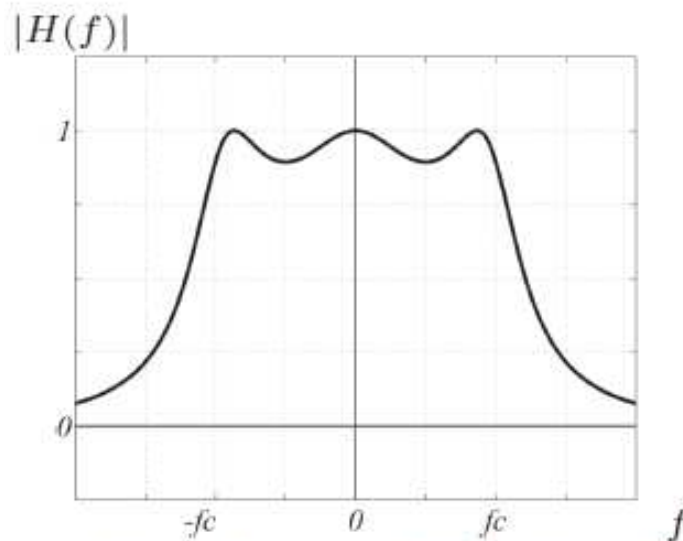
Filtrage

- Filtre de Tchebycheff

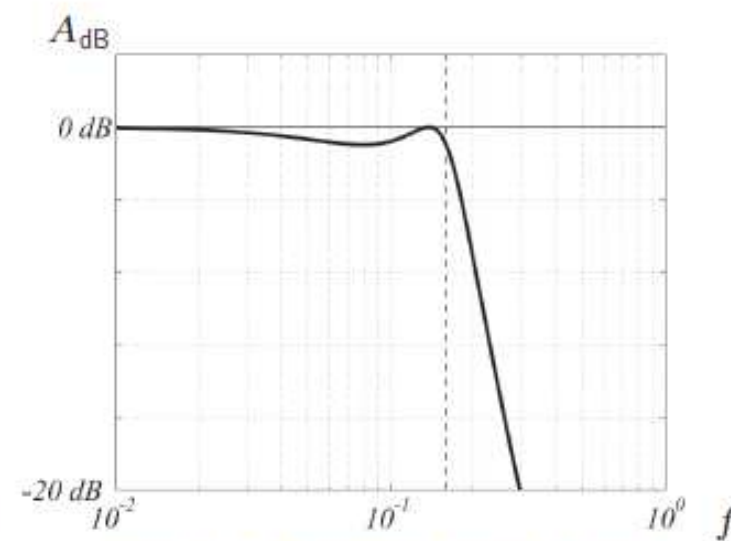
$$H(f) = \frac{1}{1 + j\mu T_k(f)}$$

avec $\mu < 1$, qui détermine l'amplitude des oscillations et $T_k(f)$, le polynôme de Tchebycheff d'ordre K défini par :

$$T_k(f) = \begin{cases} \cosh \left(K \cosh^{-1}(2\pi f) \right) & \text{si } |f| > \frac{1}{2\pi}, \\ \cos \left(K \cos^{-1}(2\pi f) \right) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$



filtre de Tchebycheff d'ordre $K = 3$
(échelle linéaire)



filtre de Tchebycheff d'ordre $K = 3$
(échelle logarithmique)

corrélation

La corrélation

Définition : l'opération de corrélation, notée $\otimes$, permet d'exprimer la ressemblance entre deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ au niveau de la forme et de la position en fonction d'un paramètre de translation. La fonction de corrélation entre deux signaux $f(t)$ et $g(t)$, notée $C_{fg}(t)$, est appelée fonction d'intercorrélation (ou corrélation croisée ou corrélation mutuelle) et est définie par :

$$C_{fg}(t) = f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau + t) \bar{g}(\tau) d\tau.$$

Par changement de variables, la fonction d'intercorrélation est également définie par :

$$C_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \bar{g}(\tau - t) d\tau.$$

Corrélation

- Application aux signaux réels : les deux formes précédentes deviennent respectivement pour des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ réelles :

$$C_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(\tau + t)d\tau,$$

$$C_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t)g(\tau)d\tau.$$

- Calcul pratique de la corrélation : comme pour la convolution le calcul de la corrélation peut être décrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en plusieurs étapes :
 1. tracer $f(\tau)$ et $g(\tau)$,
 2. décaler $g(\tau)$ de t pour obtenir $g(\tau + t)$,
 3. faire le produit de $f(\tau)$ par $g(\tau + t)$,
 4. Calculer l'aire sous la courbe ainsi obtenu (intégrale) pour obtenir la valeur de $C_{fg}(t)$ à l'instant t .
 5. Répéter l'opération pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Corrélation

- Fonction d'autocorrélation :

$$C_{ff}(t) = f(t) \otimes f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau + t) \bar{f}(\tau) d\tau.$$

Si $f(t)$ est réelle, l'autocorrélation s'écrit respectivement, en utilisant les deux formes précédentes :

$$C_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(\tau + t) d\tau,$$

$$C_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(\tau - t) d\tau,$$

La fonction d'autocorrélation d'un signal réel est donc paire ($C_{ff}(-t) = C_{ff}(t)$). De plus, elle est maximale pour $t = 0$ (pas de décalage).

Corrélation

- Transformée de Fourier du produit de corrélation :
 - ✓ si $h(t) = f(t) \otimes g(t)$ (intercorrélation) :

$$H(f) = F(f) \cdot \bar{G}(f),$$

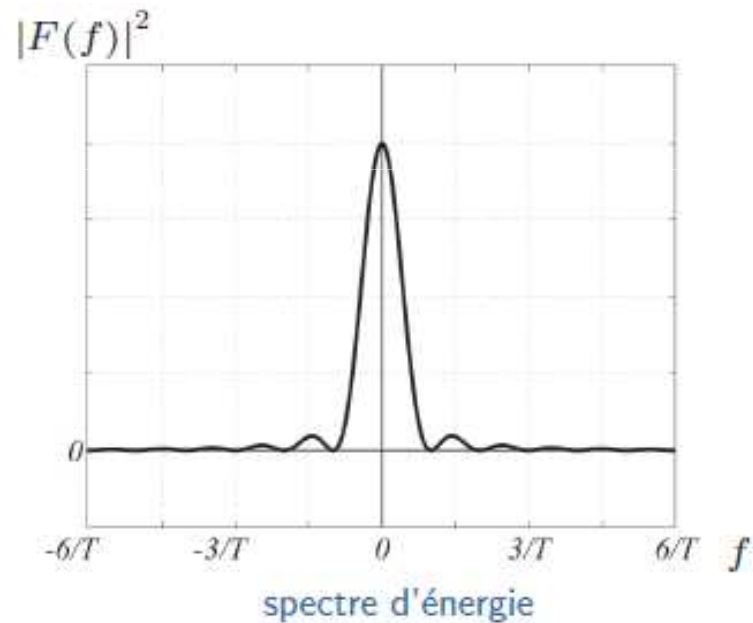
- ✓ si $h(t) = f(t) \otimes f(t)$ (autocorrélation) :

$$H(f) = |F(f)|^2.$$

$|F(f)|^2$ est la densité spectrale d'énergie du signal $f(t)$ qui est donc égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de $f(t)$. La densité spectrale d'énergie définit le spectre d'énergie du signal $f(t)$.

Corrélation

- Spectre d'énergie :
spectre d'énergie de l'impulsion rectangulaire (signal porte) de largeur T :



Corrélation

- Densité spectrale d'énergie : la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie finie est aussi la densité spectrale d'énergie de ce signal, c'est à dire aussi le carré du module de son spectre.

Égalité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\bar{G}(f)df.$$

Conséquence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df.$$

l'énergie totale du signal $f(t)$ est donc conservée par la transformée de Fourier. L'énergie totale du signal $f(t)$ est donc aussi égale à l'intégrale de la densité spectrale d'énergie.

Corrélation

- Densité spectrale de puissance : la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal à puissance moyenne finie est appelée la densité spectrale de puissance de ce signal. **Elle n'est pas égale au carré du module de la transformée de Fourier de ce signal.**

Égalité de Bessel-Parseval :

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) \bar{g}(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^f \bar{c}_n^g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^f c_{-n}^g.$$

Conséquences :

$$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n^f|^2, \quad \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt$ est la puissance moyenne du signal périodique $f(t)$ de période T_0 . Cette puissance est égale à la somme des modules aux carrés de ses coefficients de Fourier c_n^f .

Modulation

Introduction

- Les systèmes de transmission des signaux sont caractérisés par des supports (air, câble plat, paire torsadée, câble coaxial, fibre optique, ...) dont la sensibilité aux bruits est variable et qui peuvent transporter des informations sur des distances plus ou moins grandes.
- Le spectre d'un signal est caractérisé par sa largeur de bande qui définit les fréquences minimale et maximale que peut posséder ce signal.
- Un système de transmission est caractérisé par sa bande passante qui définit le domaine de fréquence dans lequel les signaux sont correctement transmis.

Modulation

- Le spectre d'un signal doit donc être compris dans la bande passante du support de transmission.
- Pour être optimisé, le support du système de transmission doit avoir une bande passante proche de la largeur de bande des signaux à transmettre.
- Deux techniques de transmission peuvent être distinguées :
 - ✓ la transmission en bande de base : le signal est transmis sans modification,
 - ✓ la modulation : le signal subit une modification en fréquence.

Modulation

Définitions

- La modulation est un procédé dans lequel un signal primaire $s(t)$, appelé signal modulant, modifie un signal auxiliaire $s_p(t)$, appelé signal porteur ou porteuse, pour créer un signal secondaire $s_m(t)$ appelé signal modulé dont les caractéristiques fréquentielles sont mieux adaptées à la transmission.
- L'opération inverse, appelée la démodulation, consiste à reconstruire le signal modulant à partir du signal modulé.
- La transmission par modulation présente essentiellement deux avantages :
 - ✓ le multiplexage fréquentiel : le même support de transmission est utilisé par plusieurs signaux simultanément,
 - ✓ l'adaptation au système de transmission (bande passante, bruit, distance de propagation).

Modulation

Les différentes formes de modulation

- Les modulations à porteuse sinusoïdale (modulation continue) : le signal porteur $s_p(t)$ est une sinusoïde de fréquence f_p :

avec φ , la phase du signal porteur.

$$s_p(t) = \cos(2\pi f_p t + \varphi),$$

- Deux familles de modulation continue se distinguent :
 - ✓ les modulations linéaires ou modulations d'amplitude,
 - ✓ les modulations angulaires ou modulations exponentielles.
- Les modulations d'impulsions (modulation échantillonnée) : le signal porteur $s_T(t)$ est une suite périodique d'impulsions de période T .
- Différentes familles de modulation échantillonnée se distinguent :
 - ✓ les modulations d'impulsions en amplitude (PAM),
 - ✓ les modulations d'impulsions en durée (PDM),
 - ✓ les modulations d'impulsions en position (PPM),
 - ✓ les modulations d'impulsions en fréquence (PFM).

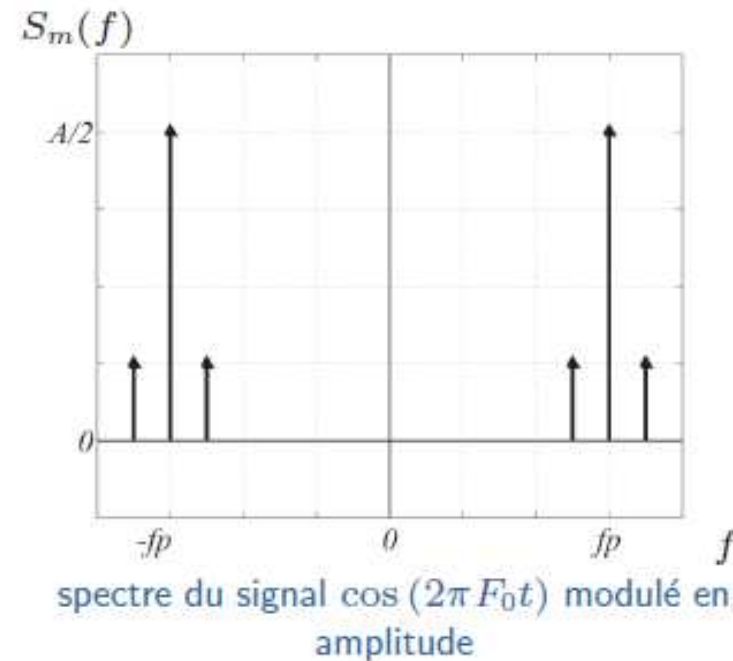
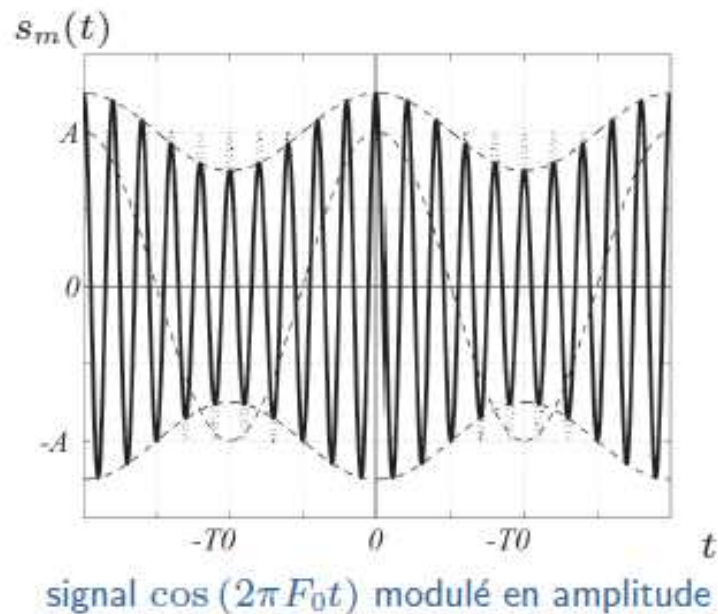
Modulation

Modulation linéaires

- Modulation d'amplitude avec porteuse (AM) :

$$s_m(t) = A \cdot [1 + m \cdot s(t)] \cdot s_p(t),$$

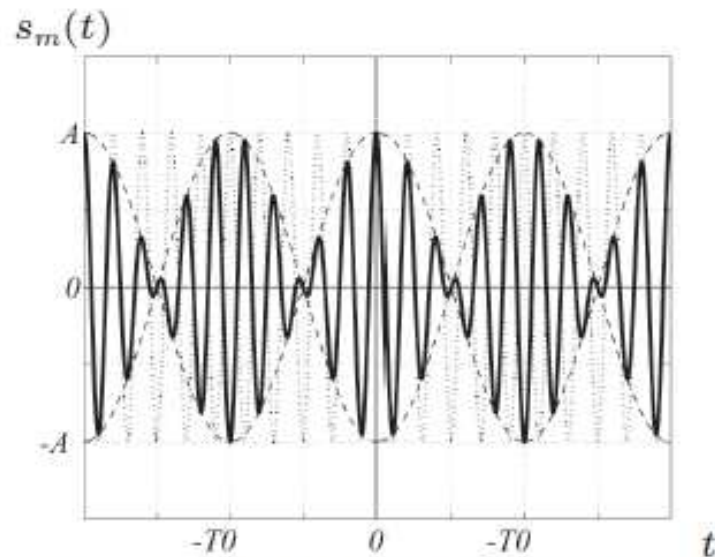
avec $|s(t)| \leq 1$ et m , le taux de modulation compris entre 0 et 1.



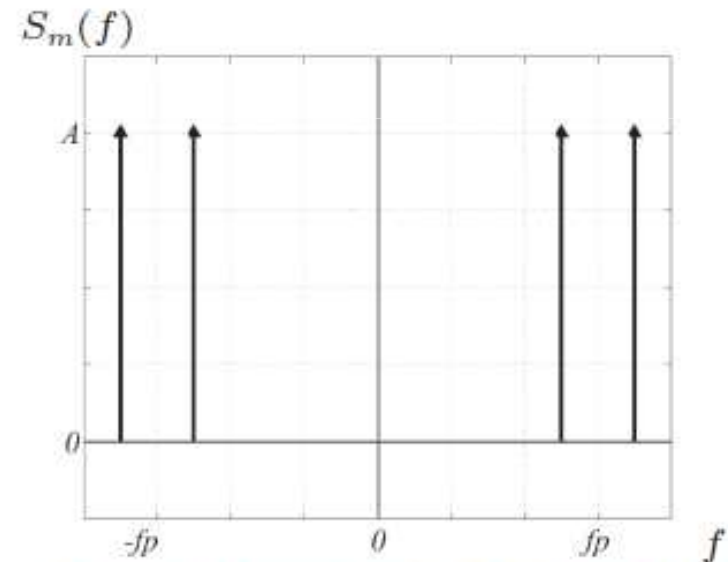
Modulation

- Modulation d'amplitude sans porteuse (AM-P) ou multiplication

$$s_m(t) = A \cdot s(t) \cdot s_p(t).$$



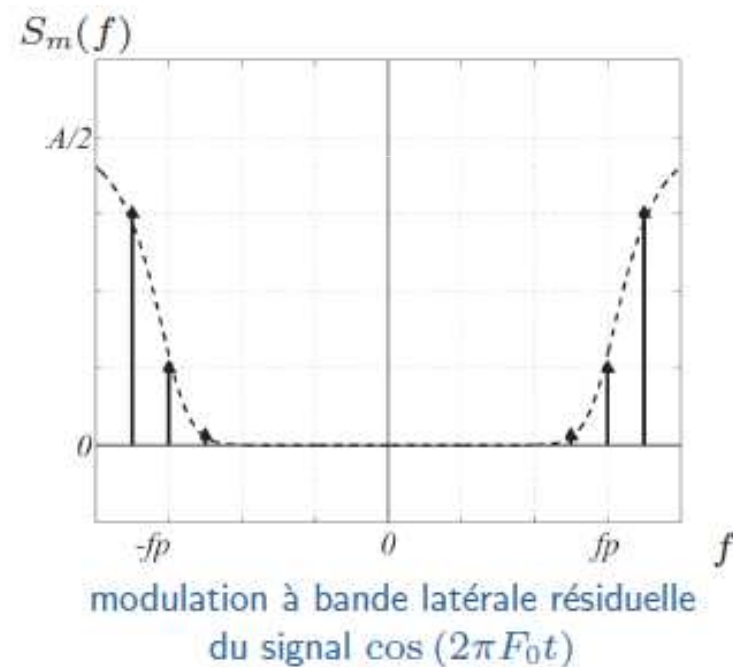
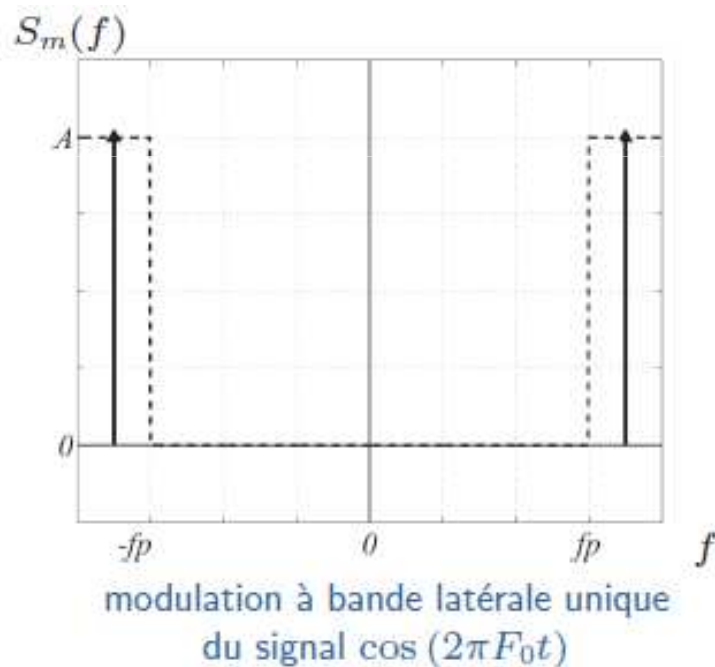
signal $\cos(2\pi F_0 t)$ modulé en amplitude



spectre du signal $\cos(2\pi F_0 t)$ modulé en amplitude

Modulation

- Modulation à bande latérale unique (SSB)
- Modulation à bande latérale résiduelle (VSB)



Modulation

- Démodulation
 - ✓ Détection synchrone : cette méthode consiste à effectuer le produit du signal modulé reçu avec un signal périodique de fréquence f_d la plus proche possible de la fréquence f_p de la porteuse et à éliminer les composantes indésirables à l'aide d'un filtre passe-bas ou passe-bande. Lorsque le signal de porteuse est émis, il est possible de caler la fréquence f_d sur la fréquence f_p .
 - ✓ Détection d'enveloppe : cette méthode qui ne nécessite aucun signal auxiliaire, consiste à prendre la valeur absolue du signal modulé reçu et à éliminer les composantes redressées indésirables à l'aide d'un filtre passe-bas (lissage).

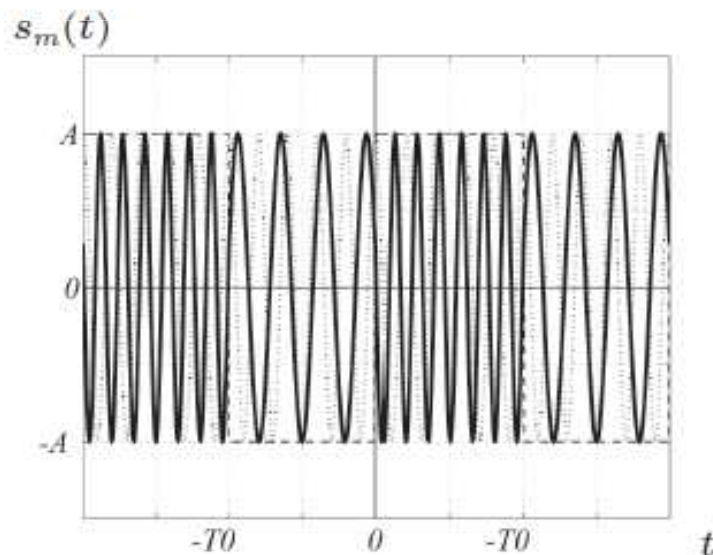
Modulation

Modulation angulaires

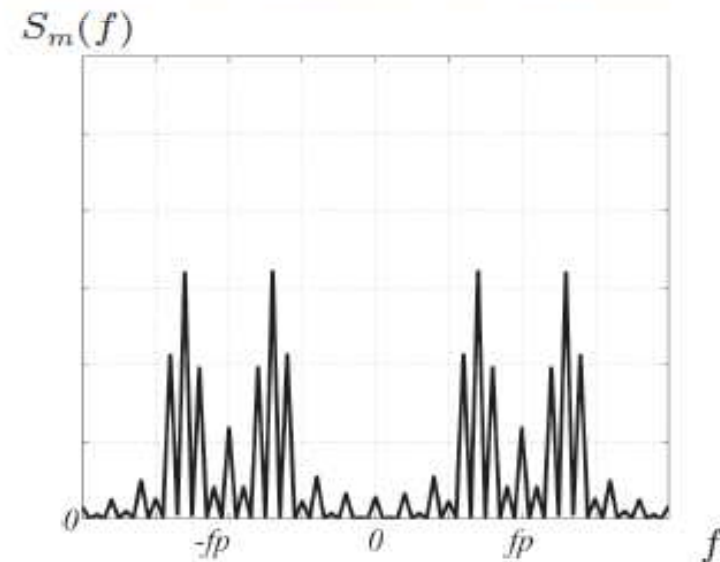
- Modulation de fréquence (FM) :

$$s_m(t) = A \cdot s_p(t),$$

avec $\varphi = 2\pi \cdot \Delta F \cdot \int_0^t s(t) dt$ où ΔF représente l'excursion de fréquence.



signal rectangulaire de fréquence F_0
modulé en fréquence



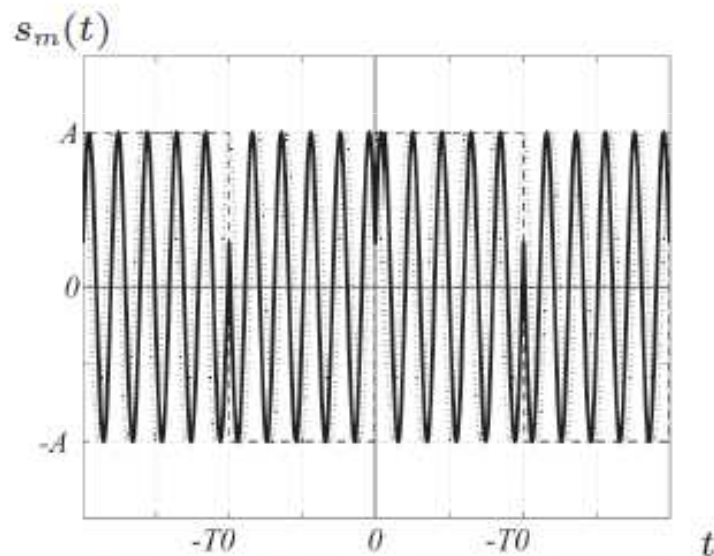
spectre du signal rectangulaire de fréquence F_0
modulé en fréquence

Modulation

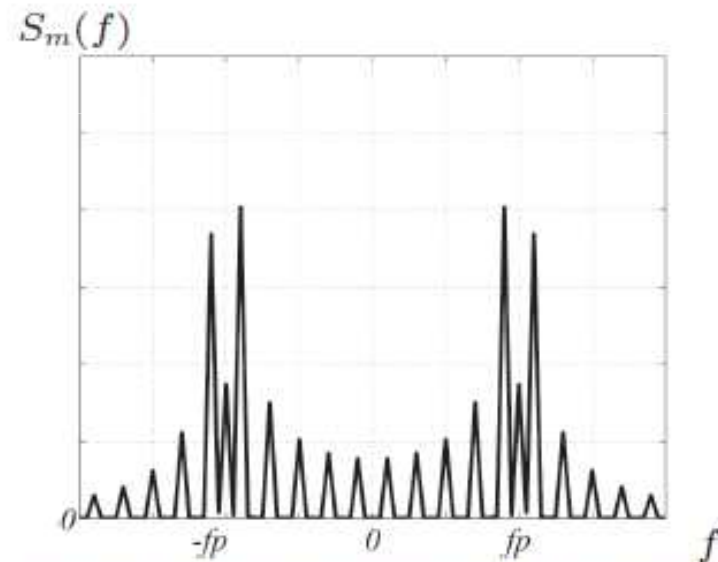
- Modulation de phase (ΦM)

$$s_m(t) = A \cdot s_p(t),$$

avec $\varphi = \Delta\phi \cdot s(t)$ où $\Delta\phi$ représente l'excursion de phase.



signal rectangulaire de fréquence F_0
modulé en phase



spectre du signal rectangulaire de fréquence F_0
modulé en phase

Modulation

- Fonctions de Bessel de première espèce

Lorsque le signal modulant $s(t)$ peut se décomposer en une série de Fourier, il s'exprime ainsi comme une somme de sinusoides.

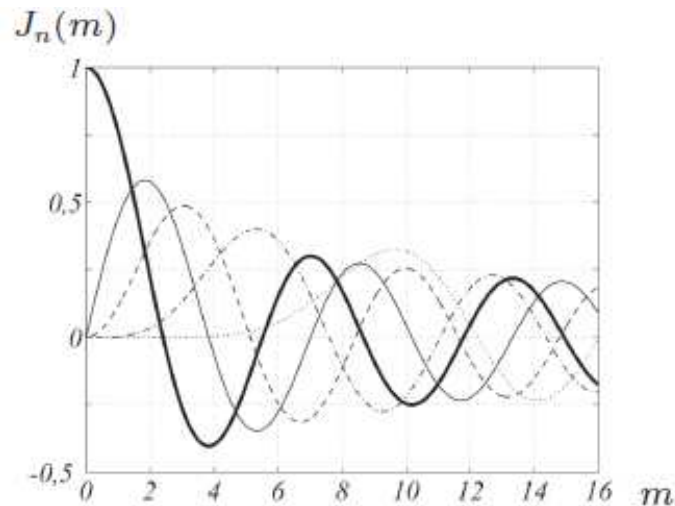
Dans le cas d'une modulation angulaire, le signal modulé $s_m(t)$ s'exprime alors comme une somme de termes de la forme $\cos [m \cdot \sin (t)]$ et $\sin [m \cdot \sin (t)]$.

Ces termes peuvent être développés en utilisant les fonctions de Bessel de première espèce, notée $J_n(m)$:

$$\begin{aligned}\cos [m \cdot \sin (t)] &= J_0(m) + \\ &2J_2(m) \cos(2t) + 2J_4(m) \cos(4t) + \dots \\ &= J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(m) \cos(nt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin [m \cdot \sin (t)] &= \\ &2J_1(m) \sin(t) + 2J_3(m) \sin(3t) + \dots \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(m) \sin(nt)\end{aligned}$$

$$\text{avec : } J_n(m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{m}{2}\right)^{n+2k}.$$



Fonctions de Bessel de première espèce
($n = 0, n = 1, n = 2, n = 4, n = 8$)

Modulation

- Démodulation
 - ✓ Conversion FM/AM et détection d'enveloppe
 - ✓ Conversion FM/PFM et moyennage temporel
 - ✓ Détection par boucle à asservissement de phase